محاضرة ١

الديناميكا

الكيناميكا	الكيناتيكا
دراسة الحركه دون معرفه السبب	دراسة الحركه بمعرفة السبب
(١) الباب الأول	(١) المقذوفات
	(٢) الحركه الإهتزازية
	(٣) الدفع والتصادم
	(٤) الحركه الدورانيه
	(٥) القوى الوهمية

الباب الأول :- "حركه النقطة المادية"

$\underline{op} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$

إذا كانت p نقطه ثابته

$\underline{op} = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j}$

إذا كانت p نقطة متغيره حيث $\underline{op}$ متجه الموضع

$\therefore \underline{r} = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j}$

$\underline{v} = \frac{dr}{dt} = \dot{x}(t)\,\underline{i} + \dot{y}(t)\,\underline{j}$

حيث $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$\underline{a} = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t)\,\underline{i} + \ddot{y}(t)\,\underline{j}$

حيث $|a| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

$\therefore$ الإزاحه إشتقاق سرعه إشتقاق عجلة

الإزاحه تكامل سرعه تكامل عجله $\therefore$

وبالتالى :- العجله لها صورتين

(١) العجلة داله فى الزمن $\underline{a} = \frac{dv}{dt}$

(٢) العجلة دالة فى الإزاحة $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$

مثال :- تتحرك نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت المسافة x تتعين ب العلاقة $x = t^3 - 12t + 8$. عين المسافة والزمن والعجلة عندما تتلاشى السرعة .

الحل

$x = t^3 - 12t + 8$

$\dot{x} = 3t^2 - 12$

لمعرفة السرعة نجرى الإشتقاق

عندما تتلاشى السرعة يكون الزمن = ؟

$0 = 3t^2 - 12 \Rightarrow 12 = 3t^2 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \Rightarrow t = 2$

$\ddot{x} = 6t$

لمعرفة العجلة نجرى الإشتقاق

عندما تتلاشى السرعة يكون الزمن = 2 والعجلة = ؟

$\ddot{x} = 6 \times 2 = 12$

عندما تتلاشى السرعة يكون الزمن = 2 والمسافة = ؟

$x = (2)^3 - 12(2) + 8 = -8$

مثال ٢ :- نقطة مادية تتحرك بالعلاقة $\ddot{x} = 9 - 3t^2$ فإذا بدأ الجسم الحركة من السكون عند الوضع $x = -30$ فأوجد

(١) متى يعود الجسم إلى حالة السكون مرة أخرى .

(٢) عين العجلة والمسافة عند $t = 4$.

$\ddot{x} = 9 - 3t^2 \Rightarrow (1)$

الحل :-

$t = 0 \ , \ \dot{x}_0 = 0 \ , \ x = -30$ الجسم بدأ الحركة من السكون

وهذه هى الشروط الإبتدائية

بإجراء التكامل على (١)

$\dot{x} = 9t - t^3 + c_1$

بالتعويض بالشروط الإبتدائية

$0 = 9(0) - (0)^3 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$\therefore \dot{x} = 9t - t^3 \Rightarrow (2)$

يعود الجسم مرة أخرى عندما يكون $\dot{x} = 0$ ، $t = ?$

بالتعويض فى 2

$0 = 9t - t^3 \Rightarrow 0 = t(9 - t^2)$

$\Rightarrow t = 0$ or $9 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3 \Rightarrow t = 3$

لمعرفة المسافة عند $t=4$ نعوض بعد إجراء التكامل على ②

$$x = \frac{9}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 + c_2$$

نعوض في الشروط الابتدائية $t=0$, $x=-30$

$$-30 = \frac{9}{2}(0)^2 - \frac{1}{4}(0)^2 + c_2 \Rightarrow c_2 = -30$$

$$\therefore x = 9/2\, t^2 - 1/4\, t^4 - 30 \Rightarrow 3$$

بتعويض $t=4$

$$\therefore x = 9/2\,(4)^2 - 1/4\,(4)^4 - 30 = -22$$

لمعرفة العجلة عند $t=4$ نعوض في ١

$$\ddot{x} = 9 - 3t^2 = 9 - 3(4)^2 = -39$$

مثال ٣ :- تتعين العلاقة بين السرعة والمسافة لجسيم متحرك على محور x بالصورة $x = \mu \dot{x}^{1/2} - \lambda$ وبدأ الحركة بسرعة $\dot{x}_0$ ، λ ، μ ثوابت

أوجد الزمن اللازم حتى تصل السرعة إلى ضعف سرعتها الابتدائية.

ماهي العلاقة بين العجلة والسرعة

الحل :- المطلوب هو الزمن عند ما يكون $\dot{x} = 2\dot{x}_0$

$\therefore$ المطلوب علاقة بين السرعة والزمن

$$① \Leftarrow x = \mu \dot{x}^{1/2} - \lambda \Rightarrow x + \lambda = \mu\sqrt{\dot{x}} \Rightarrow \sqrt{\dot{x}} = \frac{x+\lambda}{\mu}$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{(x+\lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow ②$$

من ② لكي أوجد الزمن

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{(x+\lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow dt = \mu^2 dx/(x+\lambda)^2$$

$$\therefore dt = \mu^2 (x+\lambda)^{-2} dx$$

بإجراء التكامل

$$t = -\mu^2 (x+\lambda)^{-1} + c_1$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية :- $t=0$, $x=0$

لأن الجسم تحرك من السكون

$$\therefore 0 = -\mu^2(0+\lambda)^{-1} + c_1 \Rightarrow 0 = -\mu^2\lambda^{-1} + c_1 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$\therefore t = -\mu^2(x+\lambda)^{-1} + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow ③$$

بالتعويض بـ ١ في ٣

$t = -\mu^2 (\mu\sqrt{\dot{x}} - \lambda + \lambda)^{-1} + \frac{\mu^2}{\lambda}$

$\therefore t = -\mu^2 (\mu\sqrt{\dot{x}})^{-1} + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow t = \frac{-\mu}{\sqrt{\dot{x}}} + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow (5)$

ولكى نعرف $\dot{x}$ نعوض ف ع د الشروط الإبتدائية

$\dot{x} = \dot{x}_0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad t = 0$

$\therefore \dot{x}_0 = \frac{(0+\lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow \dot{x}_0 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$

$\ddot{x} = 2\dot{x}_0^{3/2}/\mu = 2\lambda^3/\mu^4 \Rightarrow (4)$

ومن المعطى

بالتعويض ف (4) ف (5)

$\therefore t = -\mu/\sqrt{2}\,\lambda/\mu + \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow t = \frac{-\mu^2}{\sqrt{2}\,\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda}$

$\therefore t = \frac{\mu^2}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ #

العلاقة بين العجلة والسرعة

نفاضل معادلة ع

$\dot{x} = \frac{(x+\lambda)^2}{\mu^2} \Rightarrow \mu^2 \dot{x} = (x+\lambda)^2$

بأخذ الجذر الطرفين

$\therefore \mu\sqrt{\dot{x}} = x + \lambda$

بالتفاضل

$\mu \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}}} \cdot \ddot{x} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = 2\dot{x}^{3/2}/\mu$

مثال 4: إذا كان $\ddot{x} = 2\dot{x} + 3$ ، $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = 3\,m/sec$ فاثبت أن $\dot{x} = \frac{-3}{2}(3e^{2t} - 1)$ ثم أوجد العلاقة بين x, t

الحل:-

$\ddot{x} = 2\dot{x} + 3 \Rightarrow (1)$

الشروط الإبتدائية

$x_0 = 0 \quad , \quad t = 0 \quad , \quad \dot{x} = 3$

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 2\dot{x} + 3$

بإجراء التكامل !

$\therefore dt = (2\dot{x} + 3)^{-1}\, d\dot{x}$

$\therefore dt = \frac{1}{2} \cdot 2(2\dot{x} + 3)^{-1}\, d\dot{x}$

بالتكامل

$t = \frac{1}{2}\ln(2\dot{x} + 3) + c_1$

بالتعويض بالشروط الإبتدائية

$t = 0 \quad , \quad \dot{x} = 0$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}\ln(6+3) + c \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln 9 = c_1$

$\therefore t = \frac{1}{2}\ln(2\dot{x}+3) + \frac{1}{2}\ln 9$

$2t = \ln(2\dot{x}+3) + \ln 9 \Rightarrow 2t = \ln\frac{2\dot{x}+3}{9}$

بتأثير e للطرفين

$e^{2t} = \frac{2\dot{x}+3}{9} \Rightarrow 9e^{2t} = 2\dot{x}+3 \Rightarrow 2\dot{x} = 9e^{2t} - 3$

$\Rightarrow 2\dot{x} = 3(3e^{2t}-1) \Rightarrow \dot{x} = \frac{3}{2}(3e^{2t}-1) \Rightarrow ②$ #

⇐ العلاقة بين المسافة والزمن نكامل ②

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}(3e^{2t}-1) \Rightarrow dx = \frac{3}{2}(3e^{2t}-1)\,dt$

$\therefore x = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}e^{2t} - t\right) + C_3 \Rightarrow x = \frac{9}{4}e^{2t} - \frac{3}{2}t + C_3$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$\therefore 0 = \frac{9}{4}e^{2(0)} - \frac{3}{2}(0) + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{-9}{4}$

$\therefore x = \frac{9}{4}e^{2t} - \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}$

مثال ⑤

تتحرك نقطه ماديه من السكون بعجلة ثابته ترتبط بالزمن بالعلاقه $\ddot{x} = \alpha - \beta t^2$ حيث α ، β ثوابت . أثبت أن النقطه الماديه تكتسب أقصى سرعه لها بعد زمن قدره $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ وأنها تكون قد قطعت مسافه قدرها $\frac{5}{12}\,\frac{\alpha^2}{\beta}$ ثم أوجد العلاقه بين هذه المسافه وأقصى سرعه .

الحل :- الجسم يتحرك من السكون $x_0 = 0,\ t = 0,\ x = 0$

$\ddot{x} = \alpha - \beta t^2 \Rightarrow ①$

بالتكامل ①

$\dot{x} = \alpha t - \frac{\beta}{3}t^3 + C_1$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$0 = \alpha(0) - \frac{\beta}{3}(0)^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

$\therefore \dot{x} = \alpha t - \frac{\beta}{3}t^3 \Rightarrow ②$

الجسم يكون سرعته أكبر ما يمكن عندما يكون $\ddot{x} = 0$

$\therefore$ من ① ينتج أن

$0 = \alpha - \beta t^2 \Rightarrow \beta t^2 = \alpha \Rightarrow t^2 = \frac{\alpha}{\beta}$

$\Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ #

لمعرفة المسافه نكامل ②

$\therefore \dot{x} = \alpha t - \frac{\beta}{3}t^3$

$\therefore x = \frac{\alpha}{2}t^2 - \frac{\beta}{12}t^4 + C_2$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$0 = \frac{\alpha}{2}(0)^2 - \frac{\beta}{12}(0)^4 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$\therefore x = \frac{\alpha}{2}t^2 - \frac{\beta}{12}(t)^4 \Rightarrow ③$

نعوض في 3 $t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

لمعرفة المسافة عند

$x = \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{1}{12} \beta t^4$

$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 - \frac{\beta}{12} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^4$

$\Rightarrow x = \frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{\alpha^2}{12\beta} \Rightarrow x = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\beta}$ //

العلاقة بين هذه المسافة وأقصى سرعة

$t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ وتكون المسافة عندما يصل الجسم إلى أقصى سرعة يكون

$x = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\beta}$ من 2

$\dot{x} = \alpha t - \frac{1}{3} \beta t^3$

$\dot{x}_{max} = \alpha \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \beta \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

$\therefore \dot{x}^2_{max} = \frac{4}{9} \frac{\alpha^3}{\beta} \Rightarrow (4)$

$\because x = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\beta} \longrightarrow \beta = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{x} \Rightarrow (5)$

بالتعويض 5 في 4

$\dot{x}^2_{max} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\alpha^3}{\frac{5}{12} \cdot \frac{\alpha^2}{x}} = \frac{4 \cdot 12^4 \alpha^3 x}{3 9 \cdot 5 \alpha^2} = \frac{16 \alpha x}{15}$

$\therefore \dot{x}^2_{max} = \frac{16}{15} \alpha x$

مثال 6 يتحرك جسم في خط مستقيم ox تحت تأثير عجلة تتجه دائما نحو o ومقدارها $\lambda(x + a^4 x^{-3})$ حيث λ ثابت، فإذا علم أن الجسيم قد بدأ الحركة من السكون من نقطة تبعد مسافة a عن o فأثبت أنه يصل إلى o في زمن قدره $\frac{\pi}{4} \lambda^{-1/2}$

الحل

الجسم بدأ الحركة من السكون من نقطة a

$\therefore t = 0, \quad x = a, \quad \dot{x}_0 = 0$

$\because \ddot{x} = -\lambda (x + a^4 x^{-3})$

$\because$ العجلة تتجه نحو o

$\because$ العجلة دالة في المسافة

$a = v \frac{dv}{dx} = -\lambda (x + a^4 x^{-3})$

$\therefore v\, dv = -\lambda (x + a^4 x^{-3})\, dx$

بالتكامل

$\frac{1}{2} v^2 = -\lambda \left(\frac{1}{2} x^2 + a^4 \frac{x^{-2}}{2}\right) + c_1$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$\therefore \frac{1}{2} (0)^2 = -\lambda \left(\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{a^4}{2} (0)^{-2}\right) + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$\therefore \frac{1}{2} \underline{v}^2 = -\lambda(\frac{1}{2}x^2 - a^4 x^{-2}/2)$

بضرب في 2 و التعويض عن $\dot{x} = \underline{v}$

$\dot{x}^2 = -\lambda(x^2 - a^2 x^{-2})$

بضرب في -1

$\therefore \dot{x}^2 = +\lambda(\frac{-x^4 + a^4}{x^2}) \Rightarrow \dot{x} = \mp\sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{a^4 - x^4}{x^2}}$

$\therefore \dot{x} = -\sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{a^4 - x^4}{x^2}}$ الموجب مرفوض لان الجسم يتجه نحو O

$\frac{dx}{dt} = -(\lambda)^{\frac{1}{2}}(a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}} x^{-1}$

$\therefore dt = -(\lambda)^{-\frac{1}{2}}(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}} x \, dx$

$\therefore +(\lambda)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{x}{(a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}}} dx$

بالتكامل

$+\sqrt{\lambda}\, t = \frac{-1}{2}\sin^{-1}(\frac{x^2}{a^2}) + c_1$

$\therefore +2\sqrt{\lambda}\, t = -\sin^{-1}(\frac{x^2}{a^2}) + c_1$

بالتعويض بالشروط الابتدائية $t = 0, \quad x = a$

$0 = \sin^{-1}(1) + c_1 \Rightarrow c_1 = -\sin^{-1}(1)$

$\therefore \sin(-c) = 1 \Rightarrow c = \frac{-\pi}{2}$

$\therefore -2\sqrt{\lambda}\, t = \sin^{-1}(\frac{x^2}{a^2}) - \frac{\pi}{2}$

$-2\sqrt{\lambda}\, t + \frac{\pi}{2} = \sin^{-1}(\frac{x^2}{a^2})$

بتأثير sin للطرفين

$\therefore \sin(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\lambda}\, t) = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \cos(2\sqrt{\lambda}\, t) = \frac{x^2}{a^2}$

$\therefore x^2 = a^2\cos(2\sqrt{\lambda}\, t)$

يصل الجسم إلى O عندما يكون $x = 0$

$\therefore 0 = a^2\cos(2\sqrt{\lambda}\, t) \Rightarrow \cos(2\sqrt{\lambda}\, t) = 0$

$2\sqrt{\lambda}\, t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}\lambda^{-\frac{1}{2}}$ #

محاضرة 2

الحركة المستوية :-

y, o, x, r, θ, $P(x,y)$

متجه موضع : $\underline{r} = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j}$

$\therefore \dot{\underline{r}} = \dot{x}(t)\,\underline{i} + \dot{y}(t)\,\underline{j}$

$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$\ddot{\underline{r}} = \ddot{x}(t)\,\underline{i} + \ddot{y}(t)\,\underline{j}$

$|\ddot{\underline{r}}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$

مثال : يتحرك جسيم في مستوى تحت تأثير العجلة

$\underline{a} = (12t^2 - 3t)\,\underline{i} + (6t - 2)\,\underline{j}$

وجد متجهي السرعة والموضع عند أي لحظة إذا علم أن الجسيم بدأ الحركة من النقطة $(1, -2)$ ومركبتا السرعة $(-2, 3)$

الحل :- الجسم بدأ الحركة من النقطة $(1, -2)$ والسرعة $(-2, 3)$

$t = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $\dot{x}_0 = -2$, $\dot{y}_0 = 3$

$\ddot{x} = 12t^2 - 3t \Rightarrow (1)$, $\ddot{y} = 6t - 2 \Rightarrow (2)$

بالتكامل 1 ، 2

$\dot{x} = \frac{12}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + c_1$, $\dot{y} = \frac{6}{2}t^2 - 2t + c_2$

$\dot{x} = 4t^3 - \frac{3}{2}t^2 + c_1$, $\dot{y} = 3t^2 - 2t + c_1$

بالتعويض بـ الشروط الإبتدائية

$\therefore -2 = c_1$, $3 = c_2$

$\dot{x} = 4t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2 \Rightarrow (3)$, $\dot{y} = 3t^2 - 2t + 3 \Rightarrow (4)$

$\therefore \underline{v} = (4t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2)\,\underline{i} + (3t^2 - 2t + 3)\,\underline{j}$

بالتكامل 3 ، 4

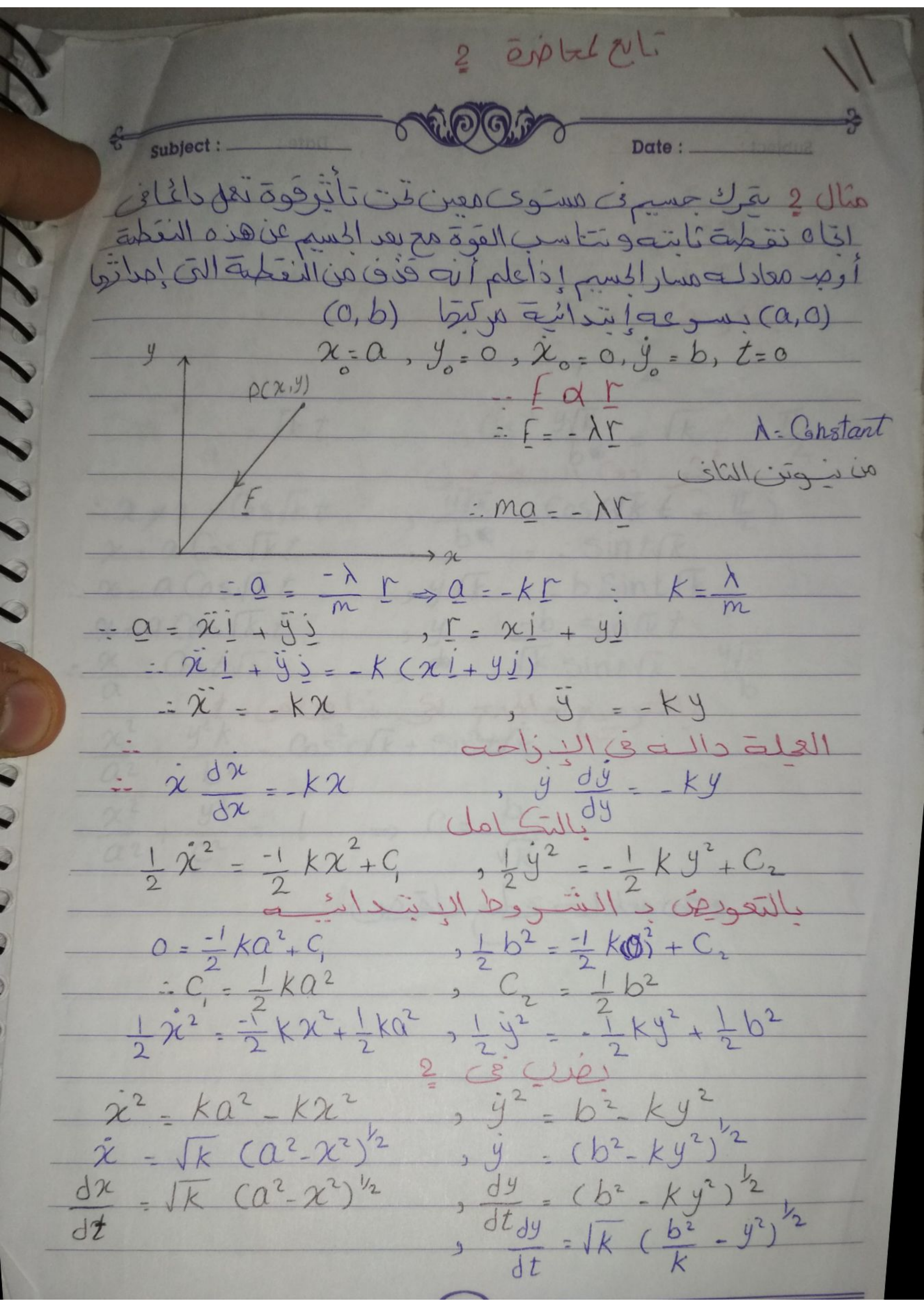
$x = t^4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 - 2t + c_3$, $y = t^3 - t^2 + 3t + c_4$

$x = t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 2t + c_3$, $y = t^3 - t^2 + 3t + c_4$

بالتعويض بـ الشروط الإبتدائية

$1 = 0 - 0 - 0 + c_3 \Rightarrow c_3 = 1$, $-2 = c_4$

$\therefore x = t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 2t + 1$, $y = t^3 - t^2 - 3t - 2$



تابع المحاضرة 2

Subject : ____ Date : ____

مثال 2 يتحرك جسيم في مستوى معين تحت تأثير قوة تعمل دائما في اتجاه نقطة ثابتة O وتتناسب القوة مع بعد الجسيم عن هذه النقطة أوجد معادلة مسار الجسيم إذا علم أنه قذف من النقطة التي إحداثياتها $(a,0)$ بسرعة إبتدائية مركبتها $(0,b)$

$$x_0 = a,\ y_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 0,\ \dot{y}_0 = b,\ t = 0$$

$$\therefore \underline{F} \propto \underline{r}$$

$$\therefore \underline{F} = -\lambda \underline{r} \qquad \lambda = \text{Constant}$$

من نيوتن الثاني

$$\therefore m\underline{a} = -\lambda \underline{r}$$

$$\therefore \underline{a} = \frac{-\lambda}{m}\underline{r} \Rightarrow \underline{a} = -k\underline{r} \quad ; \quad k = \frac{\lambda}{m}$$

$$\because \underline{a} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} \quad , \quad \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$$

$$\therefore \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} = -k(x\underline{i} + y\underline{j})$$

$$\therefore \ddot{x} = -kx \quad , \quad \ddot{y} = -ky$$

$\because$ العجلة دالة في الإزاحة

$$\therefore \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -kx \quad , \quad \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -ky$$

بالتكامل

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{-1}{2}kx^2 + C_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\dot{y}^2 = -\frac{1}{2}ky^2 + C_2$$

بالتعويض بالشروط الإبتدائية

$$0 = \frac{-1}{2}ka^2 + C_1 \quad , \quad \frac{1}{2}b^2 = \frac{-1}{2}k(0)^2 + C_2$$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{2}ka^2 \quad , \quad C_2 = \frac{1}{2}b^2$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{-1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ka^2 \quad , \quad \frac{1}{2}\dot{y}^2 = -\frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}b^2$$

بضرب في 2

$$\dot{x}^2 = ka^2 - kx^2 \quad , \quad \dot{y}^2 = b^2 - ky^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{k}\,(a^2 - x^2)^{1/2} \quad , \quad \dot{y} = (b^2 - ky^2)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{k}\,(a^2 - x^2)^{1/2} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = (b^2 - ky^2)^{1/2}$$

$$, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{k}\left(\frac{b^2}{k} - y^2\right)^{1/2}$$

Subject : Date :

$dt\sqrt{k} = \frac{-dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}$, $dt\sqrt{k} = \frac{-dy}{(\frac{b^2}{k}-y^2)^{1/2}}$

$\cos^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{k}\,t + C_3$, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{k}\,y}{b} = \sqrt{k}\,t + C_4$

بالتعويض بالشروط الابتدائيه

$C_3 = 0$, $C_4 = \frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{k}\,t$, $\cos^{-1}\frac{y\sqrt{k}}{b} = \sqrt{k}\,t + \frac{\pi}{2}$

تأثير cos للطرفين

$\therefore x/a = \cos\sqrt{k}\,t$, $\frac{y\sqrt{k}}{b} = \cos(\sqrt{k}\,t + \frac{\pi}{2})$

$x = a\cos\sqrt{k}\,t$, $= -\sin t\sqrt{k}$

$\therefore x = a\cos\sqrt{k}\,t$, $y\sqrt{k} = -b\sin t\sqrt{k}$

$x = a\cos\sqrt{k}\,t$, $y = \frac{-b}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}\,t$

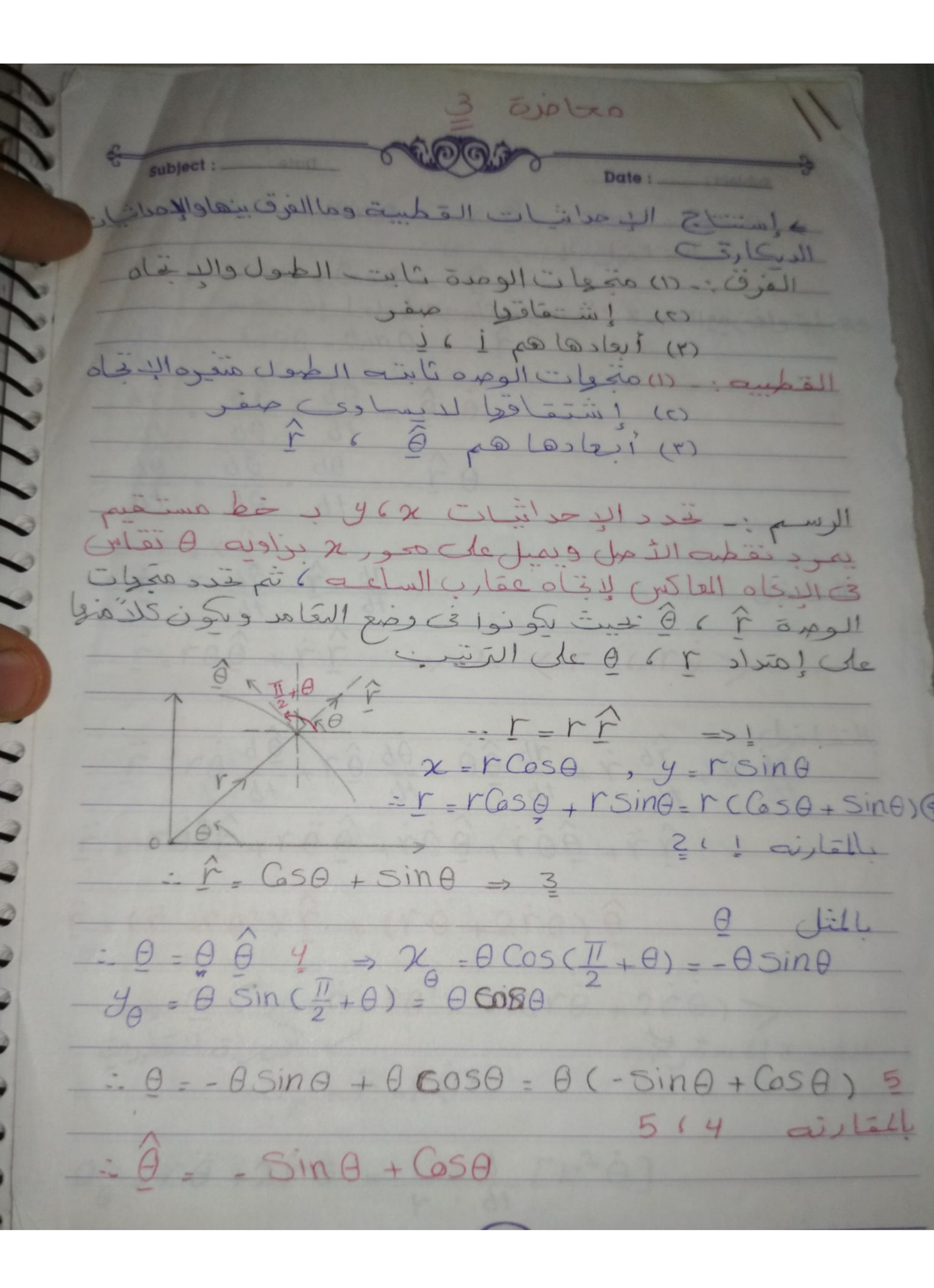
$\therefore \frac{x}{a} = \cos t\sqrt{k}$, $\sin t\sqrt{k} = \frac{y\sqrt{k}}{b}$

بالتربيع والجمع لكي نتخلص من t

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 k}{b^2} = \cos^2 t\sqrt{k} + \sin^2 t\sqrt{k}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \Rightarrow c = \frac{b}{\sqrt{k}}$

وهي معادله قطع ناقص



محاضرة 3

Subject : Date :

← إستنتاج الإحداثيات القطبية وما الفرق بينها والإحداثيات الديكارتية

الفرق :- (١) متجهات الوحدة ثابتة الطول والإتجاه

(٢) إشتقاقها صفر

(٣) أبعادها هم $\underline{i}$ ، $\underline{j}$

القطبية :- (١) متجهات الوحده ثابتة الطول متغيرة الإتجاه

(٢) إشتقاقها لا يساوي صفر

(٣) أبعادها هم $\hat{\underline{\theta}}$ ، $\hat{\underline{r}}$

الرسم :- تحدد الإحداثيات x ، y ب خط مستقيم يمر ب نقطة الأصل ويميل على محور x بزاوية θ تقاس في الإتجاه المعاكس لإتجاه عقارب الساعة ، ثم تحدد متجهات الوحدة $\hat{\underline{r}}$ ، $\hat{\underline{\theta}}$ بحيث يكونوا في وضع التعامد ويكون كل منها على إمتداد $\underline{r}$ ، $\underline{\theta}$ على الترتيب

$$\because \underline{r} = r\,\hat{\underline{r}} \Rightarrow 1$$

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$\therefore \underline{r} = r\cos\theta + r\sin\theta = r(\cos\theta + \sin\theta) \quad 2$$

بالمقارنة 1 ، 2

$$\therefore \hat{\underline{r}} = \cos\theta + \sin\theta \Rightarrow 3$$

بالمثل $\underline{\theta}$

$$\therefore \underline{\theta} = \theta\,\hat{\underline{\theta}} \quad 4 \Rightarrow x_\theta = \theta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\theta\sin\theta$$

$$y_\theta = \theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \theta\cos\theta$$

$$\therefore \underline{\theta} = -\theta\sin\theta + \theta\cos\theta = \theta(-\sin\theta + \cos\theta) \quad 5$$

بالمقارنة 4 ، 5

$$\therefore \hat{\underline{\theta}} = -\sin\theta + \cos\theta$$

Subject :   Date :

$\therefore \hat{\underline{r}} = \cos\theta + \sin\theta \quad , \quad \hat{\underline{\theta}} = -\sin\theta + \cos\theta$

بالتفاضل بالنسبة θ

$\therefore \frac{d\hat{\underline{r}}}{d\theta} = -\sin\theta + \cos\theta = \hat{\underline{\theta}}$

وهذا يتوافق مع القاعدة "أى متجه ثابت الطول ⊥ إشتقاقه"

$\therefore \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{d\theta} = -\cos\theta - \sin\theta = -\hat{\underline{r}}$

$\because \frac{d\hat{\underline{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\underline{r}}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \hat{\underline{\theta}} \cdot \dot{\theta}$

$\because \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dt} = \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\hat{\underline{r}}\,\dot{\theta}$

$\because \underline{r} = r\hat{\underline{r}}$

$\therefore \dot{\underline{r}} = r \cdot \frac{d\hat{\underline{r}}}{dt} + \hat{\underline{r}} \cdot \frac{dr}{dt}$ بالتفاضل

$\therefore \dot{\underline{r}} = r\dot{\theta}\hat{\underline{\theta}} + \dot{r}\hat{\underline{r}} \quad \Rightarrow U = \langle \dot{r} \,,\, r\dot{\theta} \rangle$

بالتفاضل

$\ddot{\underline{r}} = r\dot{\theta}\frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dt} + r\hat{\underline{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\hat{\underline{\theta}}\frac{dr}{dt} + \dot{r}\frac{d\hat{\underline{r}}}{dt} + \hat{\underline{r}}\frac{d\dot{r}}{dt}$

$\ddot{\underline{r}} = -r\dot{\theta}^2\hat{\underline{r}} + r\ddot{\theta}\hat{\underline{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\underline{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\underline{\theta}} + \ddot{r}\hat{\underline{r}}$

$\ddot{\underline{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\underline{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\underline{\theta}}$

$\Rightarrow \underline{a} = \langle (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \,,\, (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \rangle$

الصورة القطرية ←   الصورة المستعرضة

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}[r^2\dot{\theta}]$

مثال :- إذا كانت سرعة نقطة مادية على طول نصف القطر من نقطة ثابتة والعمودي عليه هما على الترتيب λr ، $\mu\theta$ أوجد معادلة المسار وأثبت أن

$$a_\theta = \mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right) \quad , \quad a_r = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

الحل :-

$$U = \langle \dot r \ , \ r\dot\theta \rangle$$

(U_r ، U_θ)

$$U_r = \dot r = \lambda r \quad (1) \qquad , \quad U_\theta = r\dot\theta = \mu\theta \quad (2)$$

بقسمة المعادلتين :

$$\therefore \frac{\dot r}{r\dot\theta} = \frac{\lambda r}{\mu\theta} \Rightarrow \frac{1}{r}\cdot\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{r}{\theta} \Rightarrow \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda r}{\mu\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{d\theta}{\theta}$$

بالتكامل

$$\therefore -r^{-1} = \frac{\lambda}{\mu}\ln\theta + c_1$$

وهذه هي معادلة المسار

∵ قانون

$$\therefore \underline{a} = \langle \ddot r - r\dot\theta^2 \ , \ r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta \rangle$$

$$\therefore a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 \Rightarrow (3)$$

باشتقاق 1، 2 و

بالتعويض من 1 في 4

$$\dot r = \lambda r \Rightarrow \ddot r = \lambda\dot r \Rightarrow 4$$

$$\therefore \ddot r = \lambda^2 r \Rightarrow 5$$

بالتعويض 5 في 3

بالتعويض 2 في 6

بالتعويض من 2 في 6

$$a_r = \lambda^2 r - r\dot\theta\cdot\dot\theta \Rightarrow 6$$

$$a_r = \lambda^2 r - \mu\theta\cdot\dot\theta$$

$$a_r = \lambda^2 r - \mu\theta\cdot\frac{\mu\theta}{r} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

\#

قانون

باشتقاق 2

$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta \Rightarrow (8)$$

$$r\dot\theta = \mu\theta \Rightarrow r\ddot\theta + \dot\theta\dot r = \mu\dot\theta$$

$$\therefore r\ddot\theta = \mu\dot\theta - \dot\theta\dot r \Rightarrow 7$$

بالتعويض 7 في 8

$$a_\theta = \mu\dot\theta - \dot\theta\dot r + 2\dot r\dot\theta = \mu\dot\theta + \dot r\dot\theta \Rightarrow a_\theta = \dot\theta \times (\mu + \dot r)$$

من 2

$$\dot\theta = \frac{\mu\theta}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\mu\theta}{r}(\mu + \dot r)$$

من 1

$$\dot r = \lambda r$$

$$a_\theta = \frac{\mu\theta}{r}(\mu + \lambda r)$$

$$\therefore a_\theta = \mu\theta\left(\frac{\mu}{r} + \lambda\right)$$

واجب: تتحرك نقطة مادية في مستوها وكانت مركبات العجلة هما

$\underline{a} = \langle \frac{2b}{r^3} \cos\theta \; , \; \frac{b}{r^3} \sin\theta \rangle$

على الترتيب أثبت أن

$(r^2 \dot{\theta})^2 = A - 2b \cos\theta$

وإذا كانت $r = a$ عند ما $t = 0$ فأثبت أن

$r^2 = a^2 + n^2 t^2$

حيث n, A ثوابت $na = \sqrt{A}$

المقذوفات :- قبل دراسة المقذوفات لابد معرفة قوانين نيوتن

قانون الأول :- يظل الجسم على حالته من حيث السكون أو الحركة مالم تؤثر عليه قوة تغير من حالته

قانون الثاني :- القوة المؤثرة على الجسم تتناسب مع كمية الحركة

$\frac{d}{dt}(m\underline{v}) \propto \underline{F} \Rightarrow m\underline{a} + \frac{dm}{dt}\underline{v} \propto F$

$\because$ الكتلة ثابتة ⇐ إشتقاقها = صفر

$\therefore m\underline{a} \propto \underline{F} \Rightarrow m\underline{a} = k F$

نضبط الوحدات بحيث يكون $k = 1$

$\therefore \underline{F} = m\underline{a}$

قانون الثالث :- لكل فعل رد فعل مساوي له في المقدار ومضاد له في الإتجاه

ما هو المقذوف :- هو جسيم يتحرك تحت تأثير وزنه فقط في مستوى رأسي مع إهمال الوسط (مقاومة الوسط)

$\sin\alpha$

v_0

mg

α

$v_0 \cos\alpha$

R

⇐ من خلال تعريف المقذوف يكون المقذوف تحت تأثير قوة وزنه فقط

⇐ من خلال قانون نيوتن الثاني ينتج أن

$\underline{F} = m\underline{a} = \langle 0, -mg \rangle$

$\underline{F} = m\underline{a} = m\langle 0, -g \rangle$

$\therefore F = m\underline{a} = m \langle \ddot{x}, \ddot{y} \rangle = \langle 0, -mg \rangle$

$\therefore m\ddot{x} = 0 \quad , \quad m\ddot{y} = -mg$

$\ddot{x} = 0 \quad (1) \quad \Leftarrow m = c \quad , \quad \ddot{y} = -g \quad (2)$

بالتكامل بالنسبه للزمن 1 ، 2

$\dot{x} = c_1 \quad , \quad \dot{y} = -gt + c_2$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \quad , \quad v_0 \sin\alpha = -g(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = v_0 \sin\alpha$

$\therefore \dot{x} = v_0 \cos\alpha \quad (3) \quad , \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \quad (4)$

بالتكامل بالنسبه للزمن 3, 4

$x = v_0 t \cos\alpha + c_3 \quad , \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha + c_4$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$0 = v_0 (0) \cos\alpha + c_3 \quad , \quad 0 = \frac{-1}{2} g (0)^2 + v_0 (0) \sin\alpha + c_4$

$\therefore c_3 = 0 \quad , \quad c_4 = 0$

$\therefore x = v_0 t \cos\alpha \quad (5) \quad , \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (6)$

$t = x / v_0 \cos\alpha \quad (7)$

من 5 ينتج أن

بالتعويض بـ 7 فى 6

$$\therefore y = v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$\therefore y = x \tan\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

وهذه معادله المسار

ملحوظه :- دائما معادله المسار تكون علاقه بين x, y فى الإحداثيات الديكارتيه و r, θ فى الإحداثيات القطبيه

للتبسيط :- $Z = \tan\alpha \quad , \quad k = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}$

$$\therefore y = xZ - kx^2$$

إستنتاج زمن أقصى إرتفاع :-

عند أقصى ارتفاع $\dot{y} = 0$, $t = t_1$

$\therefore \dot{y} = U_0 \sin\alpha - gt \Rightarrow 0 = U_0 \sin\alpha - gt_1$

$\therefore gt_1 = U_0 \sin\alpha \Rightarrow t_1 = \dfrac{U_0 \sin\alpha}{g}$

إستنتاج أقصى إرتفاع

يكون $t = t_1$, $y = y_{max}$

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + U_0 t \sin\alpha$

بالتعويض

$y_{max} = -\frac{1}{2} g \dfrac{U_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + U_0 \cdot \dfrac{U_0 \sin\alpha}{g} \cdot \sin\alpha$

$y_{max} = -\dfrac{U_0^2 \sin^2\alpha}{g} + \dfrac{U_0^2 \sin^2\alpha}{g} = \dfrac{U_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

إستنتاج زمن الطيران :-

عند ما يكون $t = T$ يكون $y = 0$

$y = U_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$

$0 = U_0 T \sin\alpha - \frac{1}{2} g T^2 \Rightarrow 0 = T(U_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g T) \Rightarrow$

$T = 0$ OR $U_0 \sin\alpha = \frac{1}{2} g T \Rightarrow T = \dfrac{2U_0 \sin\alpha}{g} = 2t_1$

$\therefore$ زمن الطيران = ضعف زمن الوصول لأقصى إرتفاع

إستنتاج المدى

عند ما يكون $t = T$, $x = R \Rightarrow y = 0$

$\therefore x = U_0 t \cos\alpha \Rightarrow R = U_0 \cdot \dfrac{2U_0 \sin\alpha}{g} \cdot \cos\alpha$

$\therefore R = \dfrac{U_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

ملحوظة :- عند ما يكون

$R = R_{max} \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$R_{max} = \dfrac{U_0^2}{g}$, because U_0, g Constant

السؤال:- هل يمكن أن يكون هناك إتجاهين للقذف يعطيان نفس المدى؟ نعم

$$R = \frac{U_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$\because$ U_0 ، g ثوابت

$\therefore$ R تعتمد على α

$\therefore R = \frac{U_0^2}{g} \cdot \sin(2(\frac{\pi}{2} - \alpha))$

$$\therefore R = \frac{U_0^2}{g} \cdot \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{U_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

مثال:- إذا قذف كرة بسرعة تكفي لأن تجعلها بالكاد تمر فوق حائطين الأول إرتفاعه a ويبتعد عن نقطة القذف مسافة b و الثاني إرتفاعه b ويبتعد عن نقطة القذف مسافة a أثبت أن

① $R = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$

② زاوية القذف أكبر من $\tan^{-1} 3$

الحل:-

$$y = x \tan - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{U_0^2 \cos^2\alpha}$$

النقطة a ، b تقع على المسار

$$\therefore a = b \tan\alpha - \frac{1}{2} g \frac{b^2}{U_0^2 \cos^2\alpha} \Rightarrow ①$$

$$b = a \tan\alpha - \frac{1}{2} g \frac{a^2}{U_0^2 \cos^2\alpha} \Rightarrow ②$$

بضرب ① في a و ② في $-b$ والجمع

$$a^2 - b^2 = \cancel{ab} - \frac{1}{2} g \frac{ab^2}{U_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{1}{2} g \frac{a^2 b}{U_0^2 \cos^2\alpha}$$

$\therefore a^2 - b^2 = \frac{g}{2U_0^2 \cos^2\alpha}(-b^2a + a^2b)$

$\therefore \frac{g}{2U_0^2 \cos^2\alpha} = \frac{a^2-b^2}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab(a-b)}$

$\therefore \frac{g}{2U_0^2 \cos^2\alpha} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (3) = K$ من خلال قانون التبسيط

بضرب a^2 ، في b^2 . والجمع

$\therefore a^3 - b^3 = a^2b\tan\alpha - ab^2\tan\alpha$

$= ab(\tan\alpha)(a-b)$

$\therefore \tan\alpha = \frac{a^3-b^3}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{ab(a-b)}$

$\therefore \tan\alpha = \frac{a^2+ab+b^2}{ab} \Rightarrow 4 = Z$ من خلال قانون التبسيط

$\therefore R = \frac{U_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{Z}{K}$

$\therefore R = \frac{a^2+ab+b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ #

$\therefore \tan\alpha = \frac{a^2+ab+b^2}{ab} = \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{ab}{ab}$

$\therefore \tan\alpha = \frac{a^2+b^2}{ab} + 1 \Rightarrow 5$

$\therefore (a - b)^2 > 0$

$\therefore a^2 + b^2 - 2ab > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab$

بقسمة ab على الطرفين

$\frac{a^2+b^2}{ab} > 2 \Rightarrow 6$

بالتعويض بـ 5 في 6

$\therefore \tan\alpha > 3$

أي زاوية القذف أكبر من 3 $\Rightarrow \tan^{-1}3 < \alpha$

حل آخر :- من خلال قانون التبسيط

$y = xZ - kx^2$

$\therefore a = Zb - kb^2$ ①

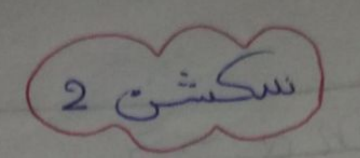
$\therefore b = Za - ka^2$ ②

ومن خلال حل معادلتين في مجهولين

$\therefore Z = \frac{a^2+ab+b^2}{ab}$, $k = \frac{a+b}{ab}$

ومن خلال قانون التبسيط

$\therefore R = \frac{Z}{k} = \frac{a^2+ab+b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$



سكشن 2

يتحرك جسيم في مستوى تحت تأثير قوة طاردة عمودية على المحور x وتعادل $m\lambda y$ حيث m هي كتلة الجسم ، λ ثابت موجب فإذا علم أن الجسيم قد قذف من النقطة $(0, b)$ بالسرعة $b\sqrt{\lambda}$ في اتجاه يوازي محور x . أوجد معادلة المسار

الحل :- $(x, y) = (0, b)$, $(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (b\sqrt{\lambda}, 0)$

$$\underline{F} = m\lambda y\, \underline{j}$$

من قانون نيوتن الثاني

$$\underline{F} = m\underline{a} = m\lambda y\, \underline{j}$$

$$\underline{a} = (\ddot{x}\, \underline{i} + \ddot{y}\, \underline{j}) = \lambda y\, \underline{j}$$

$$\therefore \ddot{x} = 0 \quad , \quad \ddot{y} = \lambda y$$

العجلة دالة في الإزاحة

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = 0 \quad , \quad \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = \lambda y$$

بالتكامل

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = C_1 \Rightarrow \dot{x}^2 = C_1 \Rightarrow \dot{x} = C_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\lambda y^2 + C_2$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$b\sqrt{\lambda} = C_1 \quad , \quad 0 = \frac{1}{2}\lambda b^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{-1}{2}\lambda b^2$$

$$\dot{x} = b\sqrt{\lambda} \quad , \quad \frac{1}{2}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\lambda y^2 - \frac{1}{2}\lambda b^2$$

$$x = tb\sqrt{\lambda} + C_2$$

بالتكامل

$$\dot{y} = \sqrt{\lambda}\,(y^2 - b^2)^{1/2}$$

$$x = tb\sqrt{\lambda} + C_2 \quad , \quad \frac{dy}{(y^2-b^2)^{1/2}} = dt\sqrt{\lambda}$$

$$x = tb\sqrt{\lambda} + C_3 \quad , \quad t\sqrt{\lambda} = \cosh^{-1}\frac{y}{b} + C_4$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$0 = 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0 \quad , \quad 0 = \cosh^{-1}(1) + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$x = tb\sqrt{\lambda} \quad , \quad t\sqrt{\lambda} = \cosh^{-1}\frac{y}{b} \Rightarrow 8)$$

$$t = \frac{x}{b\sqrt{\lambda}} \Rightarrow (7)$$

بالتعويض بـ 7 في 8

$$\frac{x}{b\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{\lambda} = \cosh^{-1}\frac{y}{b} = \frac{x}{b}$$

مثال ٤ يتحرك جسيم في مستوى تحت تأثير العجلة $\underline{a} = \lambda b \underline{i} - 2\lambda y \underline{j}$ فإذا علم أنه بدأ من السكون من النقطة $(0, b)$ فأثبت أنه عندما يكون $y = \frac{b}{2}$ فإن $36x = \pi^2 b$

الحل

$t = 0 \quad , (x, y) = (0, b) \quad , (\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (0, 0)$

$\underline{a} = (\ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}) = (\lambda b \underline{i} - 2\lambda y \underline{j})$

$\ddot{x} = \lambda b \quad , \ddot{y} = -2\lambda y$

العجلة دالة في الإزاحة

$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \lambda b \quad , \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -2\lambda y^2$

بالتكامل بالنسبة dx

$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \lambda b x + c_1 \quad , \frac{1}{2}\dot{y}^2 = -\lambda y^2 + c_2$

بالتعويض بالشروط الإبتدائية

$0 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \quad , 0 = -\lambda b^2 + c_2 \Rightarrow c_2 = \lambda b^2$

$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \lambda b x \quad , \frac{1}{2}\dot{y}^2 = -\lambda y^2 + \lambda b^2$

$\dot{x}^2 = 2\lambda b x \quad , \dot{y}^2 = 2\lambda(b^2 - y^2)$

$\dot{x} = \sqrt{2\lambda b}\, x^{1/2} \quad , \dot{y} = \sqrt{2\lambda}\,(b^2 - y^2)^{1/2}$

بالتكامل

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2\lambda b}\, x^{1/2} \quad , \frac{dy}{dt} = \sqrt{2\lambda}\,(b^2 - y^2)^{1/2}$

$\frac{dx}{x^{1/2}} = dt\sqrt{2\lambda b} \quad , \frac{dy}{(b^2 - y^2)^{1/2}} = dt\sqrt{2\lambda}$

$2\sqrt{x} = t\sqrt{2\lambda b} + c_3 \quad , \sin^{-1}\frac{y}{b} = t\sqrt{2\lambda} + c_4$

بالتعويض بالشروط الإبتدائية

$0 = 0 + c_3 \Rightarrow c_3 = 0 \quad , \sin^{-1}\frac{b}{b} = 0\sqrt{2\lambda} + c_4 \Rightarrow c_4 = \frac{\pi}{2}$

$2\sqrt{x} = t\sqrt{2\lambda b} \quad , \sin^{-1}\frac{y}{b} = t\sqrt{2\lambda} + \frac{\pi}{2}$ ②

$t = 2\left(\frac{x}{2\lambda b}\right)^{1/2}$ ①

بالتعويض بـ ① في ② وإستخدام المعطى

$\sin^{-1}\frac{b}{2b} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\lambda} + \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi = 12\left(\frac{x}{b}\right)^{1/2} + 3\pi$

$\therefore -2\pi = 12\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -\pi = 6\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \pi^2 = 36\frac{x}{b} \Rightarrow b\pi^2 = 36x$

المدى على مستوى مائل :-

(المحذوفات)

4

$\because \tan\beta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\tan\beta$ ①

$\because P(x, y)$ تقع على مسار مقذوف تحقق المعادلة

$\therefore y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{U_0^2\cos^2\alpha}$ ②

بمساواة المعادلة 1 ، 2

$$x\tan\beta = x\tan\alpha - \frac{g}{2U_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

$$\therefore x\tan\beta - x\tan\alpha + \frac{g}{2U_0^2\cos^2\alpha}x^2 = 0$$

$$\therefore x\left[\tan\beta - \tan\alpha + \frac{g}{2U_0^2\cos^2\alpha}x\right] = 0$$

$\therefore x = 0$ مرفوض OR القوس = 0

$$\therefore \tan\beta - \tan\alpha = -\frac{g}{2U_0^2\cos^2\alpha}x$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{g}{2U_0^2\cos^2\alpha}x \Rightarrow 3$$

من Δ

$$\therefore x/S = \cos\beta \Rightarrow x = S\cos\beta \Rightarrow 4)$$

بالتعويض 4 في 3

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{g}{2U_0^2\cos^2\alpha}S\cos\beta$$

$$\therefore S = \frac{2(\tan\alpha - \tan\beta)\cdot U_0^2\cos^2\alpha}{g\cos\beta}$$

$$= \frac{U_0^2}{g}\sec\beta\left[2\tan\alpha\cos^2\alpha - 2\tan\beta\cos^2\alpha\right]$$

$$= \frac{U_0^2}{g}\sec\beta\left[2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha - 2\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\cos^2\alpha\right]$$

$$S = \frac{U_0^2}{g} \sec\beta \left[\frac{\sin 2\alpha \cos\beta - 2\sin\beta \cos^2\alpha}{\cos\beta} \right]$$

$$= \frac{U_0^2}{g} \sec^2\beta \left[\sin 2\alpha \cos\beta - 2\sin\beta \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\right) \right]$$

$$= \frac{U_0^2}{g} \sec^2\beta \left[\sin 2\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos 2\alpha - \sin\beta \right]$$

$$S = \frac{U_0^2}{g} \sec^2\beta \left[\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta \right] \Rightarrow (5)$$

$\because$ نلاحظ أن β معطى ، U_0 معطى ، g ثابت

$\therefore$ الذى يتحكم فى S هو α

$$S_{max} \xRightarrow{\text{لابد}} \sin(2\alpha-\beta) = 1 \Rightarrow 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\therefore S_{max} = \frac{U_0^2}{g} \sec^2\beta \left[1 - \sin\beta \right]$$

ملحوظة عند وضع أقصى مدى مائل فإنه إتجاه المسار يقسم الزاوية بين الرأسى والمستوى المائل بالتساوى

$$\therefore S_{max} = \frac{U_0^2}{g} \cdot \left[\frac{1-\sin\beta}{\cos^2\beta} \right]$$

$$\therefore \quad = \frac{U_0^2}{g} \cdot \left[\frac{1-\sin\beta}{1-\sin^2\beta} \right]$$

$$= \frac{U_0^2}{g} \left[\frac{1-\sin\beta}{(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} \right]$$

$$S_{max} = \frac{U_0^2}{g} \left[\frac{1}{1+\sin\beta} \right]$$

القطع المغلف :-

$\therefore S_{max} = \frac{U_0^2}{g}\left(\frac{1}{1+\sin\beta}\right)$

$\therefore S_{max} = \frac{U_0^2}{2g}\left(\frac{2}{1+\sin\beta}\right)$

بوضع $\lambda = \frac{U_0^2}{2g}$

من المثلث :

$x = S_{max}\cos\beta$ ② , $y = S_{max}\sin\beta$ ③

$S_{max} = \frac{2\lambda}{1+\sin\beta}$ ①

بالتعويض بـ ① في ②

بتربيع المعادلة

$\therefore x = \frac{2\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}$

$x^2 = \frac{4\lambda^2\cos^2\beta}{(1+\sin\beta)^2} = \frac{4\lambda^2(1-\sin^2\beta)}{(1+\sin\beta)^2} = \frac{4\lambda^2(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)}{(1+\sin\beta)^2}$

$x^2 = \frac{4\lambda^2(1-\sin\beta)}{(1+\sin\beta)}$

بوضع $\sin\beta - \sin\beta$ في البسط

$x^2 = \frac{4\lambda^2(1-\sin\beta-\sin\beta+\sin\beta)}{(1+\sin\beta)}$

$x^2 = \frac{4\lambda^2(1+\sin\beta-2\sin\beta)}{(1+\sin\beta)}$

$x^2 = 4\lambda^2\left[\frac{1+\sin\beta}{1+\sin\beta} - \frac{2\sin\beta}{1+\sin\beta}\right] = 4\lambda^2\left[1 - \frac{2\sin\beta}{1+\sin\beta}\right]$

$x^2 = 4\lambda\left[\lambda - \frac{2\lambda\sin\beta}{1+\sin\beta}\right] = 4\lambda[\lambda - y]$

$\therefore x^2 = 4\lambda[\lambda - y]$ معادلة قطع مكافئ

مثال:- مستويان لهما قاعدة أفقية مشتركة ويميلان عليها بزاوية θ_1 ، θ_2 ومشتركان في الارتفاع أطلقت قذيفة من قاعدة أحد المستويين فمست بالكاد القمة المشتركة للمستويين ووصلت إلى ارتفاع المستوى الآخر أثبت أن زاوية القذف هي

$$\tan^{-1}(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)$$

$$\tan\theta_1 = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\tan\theta_1$$

$(a ، a\tan\theta_1)$

$$\cot\theta_2 = \frac{L}{h} \Rightarrow L = h\cot\theta_2$$

$$L = a\tan\theta_1\cot\theta_2$$

$(a + a\tan\theta_1\cot\theta_2 ، 0)$

$(a ، a\tan\theta_1)$ تقع على المسار

$$y = xZ - kx^2 \Rightarrow Z = \tan\alpha \quad , k = \frac{g}{2u_0^2\cos^2\alpha}$$

$$a\tan\theta_1 = aZ - a^2k \Rightarrow \tan\theta_1 = Z - ak \quad ①$$

$(a + a\tan\theta_1\cot\theta_2 ، 0)$ تقع على المسار

$$0 = Z(a + a\tan\theta_1\cot\theta_2) - (a + a\tan\theta_1\cot\theta_2)^2 k$$

$$0 = aZ(1 + \tan\theta_1\cot\theta_2) - a^2k(1 + \tan\theta_1\cot\theta_2)^2$$

$$= Z + Z\tan\theta_1\cot\theta_2 - ak - ak(2\tan\theta_1\cot\theta_2 + \tan^2\theta_1\cot^2\theta_2)$$

$=$ نطرح هذه المعادلة من ① - ②

$$\tan\theta_1 = -Z\tan\theta_1\cot\theta_2 + ak(2\tan\theta_1\cot\theta_2 + \tan^2\theta_1\cot^2\theta_2)$$

$$\tan\theta_1 + Z\tan\theta_1\cot\theta_2 - ak(2\tan\theta_1\cot\theta_2 + \tan^2\theta_1\cot^2\theta_2) = 0$$

$$\tan\theta_1[1 + Z\cot\theta_2 - ak(2\cot\theta_2 + \tan\theta_1\cot^2\theta_2)] = 0$$

$\tan\theta_1 = 0$ مرفوض OR القوس $= 0$

$$1 + Z\cot\theta_2 - ak(2\cot\theta_2 + \tan\theta_1\cot^2\theta_2) = 0$$

من ①

$$-ak = \tan\theta_1 - Z$$

بالتعويض

$$0 = 1 + Z\cot\theta_2 + (\tan\theta_1 - Z)(2\cot\theta_2 + \tan\theta_1\cot^2\theta_2) = 0$$

$$0 = 1 + Z\cot\theta_2 + (\tan\theta_1 - Z)(2 + \tan\theta_1\cot\theta_2)\cot\theta_2$$

بضرب المعادلة في $\tan\theta_2$

$0 = \tan\theta_2 + Z + (\tan\theta_1 - Z)(2 + \tan\theta_1 \cot\theta_2)$

$0 = \tan\theta_2 + \tan\theta_1(2 + \tan\theta_1\cot\theta_2) - Z(2 + \tan\theta_1\cot\theta_2) + Z$

$0 = Z(1 - 2 - \tan\theta_1\cot\theta_2) + \tan\theta_2 + \tan\theta_1(2 + \tan\theta_1\cot\theta_2)$

$$Z(1 + \tan\theta_1\cot\theta_2) = \tan\theta_2 + \tan\theta_1\left(2 + \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}\right)$$

$$= \tan\theta_2 + \tan\theta_1\left(\frac{2\tan\theta_2 + \tan\theta_1}{\tan\theta_2}\right)$$

$$= \tan\theta_2 + \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}(2\tan\theta_2 + \tan\theta_1)$$

$$= \frac{\tan^2\theta_2 + \tan\theta_1(2\tan\theta_2 + \tan\theta_1)}{\tan\theta_2}$$

$$= \frac{\tan^2\theta_2 + 2\tan\theta_1\tan\theta_2 + \tan^2\theta_1}{\tan\theta_2}$$

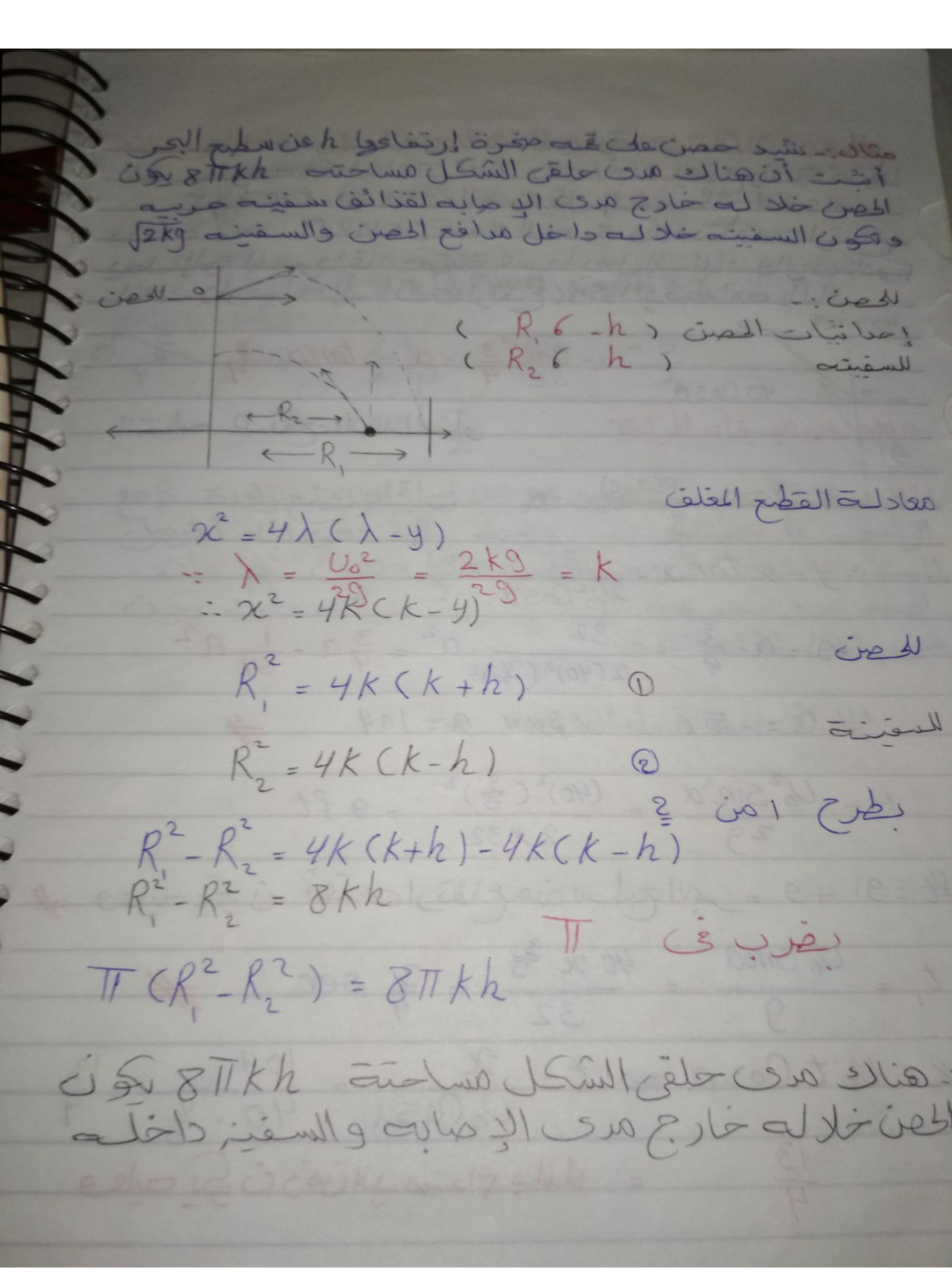
$$Z\left(1 + \tan\theta_1 \cdot \frac{1}{\tan\theta_2}\right) = \frac{(\tan\theta_2 + \tan\theta_1)^2}{\tan\theta_2}$$

$$Z\left(\frac{\tan\theta_2 + \tan\theta_1}{\tan\theta_2}\right) = \frac{(\tan\theta_2 + \tan\theta_1)^2}{\tan\theta_2}$$

$$Z = \tan\theta_2 + \tan\theta_1$$

$$\therefore \tan\alpha = \tan\theta_2 + \tan\theta_1$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\tan\theta_2 + \tan\theta_1)$$



مثال:- شيد حصن على قمة صخرة إرتفاعها h عن سطح البحر
أثبت أن هناك مدى حلقي الشكل مساحته $8\pi kh$ يكون
الحصن خلاله خارج مدى الإصابة لقذائف سفينة حربية
وتكون السفينة خلاله داخل مدافع الحصن والسفينة $\sqrt{2kg}$

للحصن:-

إحداثيات الحصن $(R_1 , -h)$

للسفينة (R_2 , h)

معادلة القطع المغلف

$$x^2 = 4\lambda(\lambda - y)$$

$$\because \lambda = \frac{u_0^2}{2g} = \frac{2kg}{2g} = k$$

$$\therefore x^2 = 4k(k - y)$$

للحصن

$$R_1^2 = 4k(k + h) \quad ①$$

للسفينة

$$R_2^2 = 4k(k - h) \quad ②$$

بطرح ١ من ٢

$$R_1^2 - R_2^2 = 4k(k+h) - 4k(k-h)$$

$$R_1^2 - R_2^2 = 8kh$$

بضرب في π

$$\pi(R_1^2 - R_2^2) = 8\pi kh$$

∴ هناك مدى حلقي الشكل مساحته $8\pi kh$ يكون
الحصن خلاله خارج مدى الإصابة والسفينة داخله

مثال :- قذف حجر إلى البحر من قمة صخرة ارتفاعها 91 ft عن سطح البحر بسرعة مقدارها 40 ft/sec وفي اتجاه يصنع زاوية قدرها $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$. اثبت أن الحجر يصل إلى سطح الماء عند نقطة تبعد 104 ft عن قاعدة الصخرة وأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر واتجاه حركته عندما يصل إلى الماء والزمن اللازم لذلك (لوصوله إلى أقصى ارتفاع) وكذا الإصطدامه بالماء

$40\sin\alpha$, U_0, α, $40\cos\alpha$, -91, a, $P(a,0)$, $U_0\cos\alpha$, $U_0\sin\alpha$

(مثلث: 3، 4، 5، α)

$\because \tan^{-1}\frac{3}{4} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$

النقطة P تقع على المسار

$$\because y = x\tan\alpha - \frac{g}{2U_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

$$-91 = a\cdot\frac{3}{4} - \frac{32}{2(40)^2(\frac{4}{5})^2}a^2 = \frac{3}{4}a - \frac{1}{64}a^2$$

$\therefore a = -56$ مرفوض ، $a = 104$ #

$$H = \frac{U_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(40)^2(\frac{3}{5})^2}{2\times 32} = 9\ ft$$

وعليه يكون أقصى ارتفاع عن سطح البحر $= 9 + 91 = 100\ ft$

$$\therefore t_1 = \frac{U_0\sin\alpha}{g} = \frac{40\times\frac{3}{5}}{32} = \frac{3}{4}\ sec \quad \#$$

$$\therefore x = U_0 t\cos\alpha \Rightarrow t = \frac{x}{U_0\cos\alpha} = \frac{104}{40\cdot\frac{4}{5}} = \frac{13}{4}$$

وعليه يكون زمن الإصطدام بالماء $= \frac{13}{4}$

لمعرفة اتجاه حركته بعد الاصطدام لا بد معرفة اتجاه السرعة

$$\dot{x}|_p = U_0 \cos\alpha = 40 \times \frac{4}{5} = 32 \text{ ft/sec}$$

$$\dot{y}|_p = -gt + U_0 \sin\alpha = -32 \times \frac{13}{4} + 40 \times \frac{3}{5} = -80$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big|_p = \frac{-80}{32} = \frac{-5}{2}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{-5}{2}$$ وهذا هو الاتجاه الحركة

مثال:- قذف جسم بسرعه $U\cos\beta$ في اتجاه يصنع زاوية β مع الرأسي على مستوى يميل بزاوية 2β وفي اتجاه أكبر ميل المستوى أثبت أن زمن الطيران $\frac{U_0}{g}$ والمدى $\frac{U_0^2}{2g}$ وأن الجسم يميل بسرعة $U_0 \sin\beta$ واتجاه حركته عندئذ يكون عموديا على اتجاه القذف

الحل في المحاضرة القادمه

ص ٣٩ ، ٤٠

سكشن 3

مثال ١ :- أحمد ومحمد شقيقان لديهما بندقية واحدة تطلق الرصاص بسرعة 32 ft/sec فإذا أراد الشقيقان إصابة هدفا يبعد عنهما 16 ft وعلى ارتفاع 8 ft عن الأرض فأثبت أن كلا منهما يمكنه إصابة الهدف بزاوية مختلفة وأوجد الزمن الذي تأخذه القذيفة في كل حالة علما بأن القذف تم على مستوى الأرض

الحل

y, x, P, 8 ft, 16 ft

النقطة P = (16 , 8) تقع على المسار

$$\therefore y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g x^2}{U^2 \cos^2\alpha}$$

$$\therefore 8 = 16\tan\alpha - \frac{1}{2}\cdot 32 \cdot \frac{(16)^2}{(32)^2\cos^2\alpha}$$

$$8 = 16\tan\alpha - \frac{4}{\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة في $\cos^2\alpha$

$$8\cos^2\alpha = 16\cos^2\alpha\tan\alpha - 4$$

$$\cos^2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha - \frac{1}{2}$$

$$2\cos\alpha\sin\alpha - \frac{1}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \cos^2\alpha = 0$$

$$2\cos\alpha\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\cos^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$$

$$-2\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{3}{2}\cos^2\alpha = 0$$

بضرب في 2 ثم التحليل

$$(3\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$\therefore 3\cos\alpha = \sin\alpha \quad , \quad \cos\alpha = \sin\alpha$$

$$\therefore \tan\alpha = 3 \quad , \quad \tan\alpha = 1 \quad \#$$

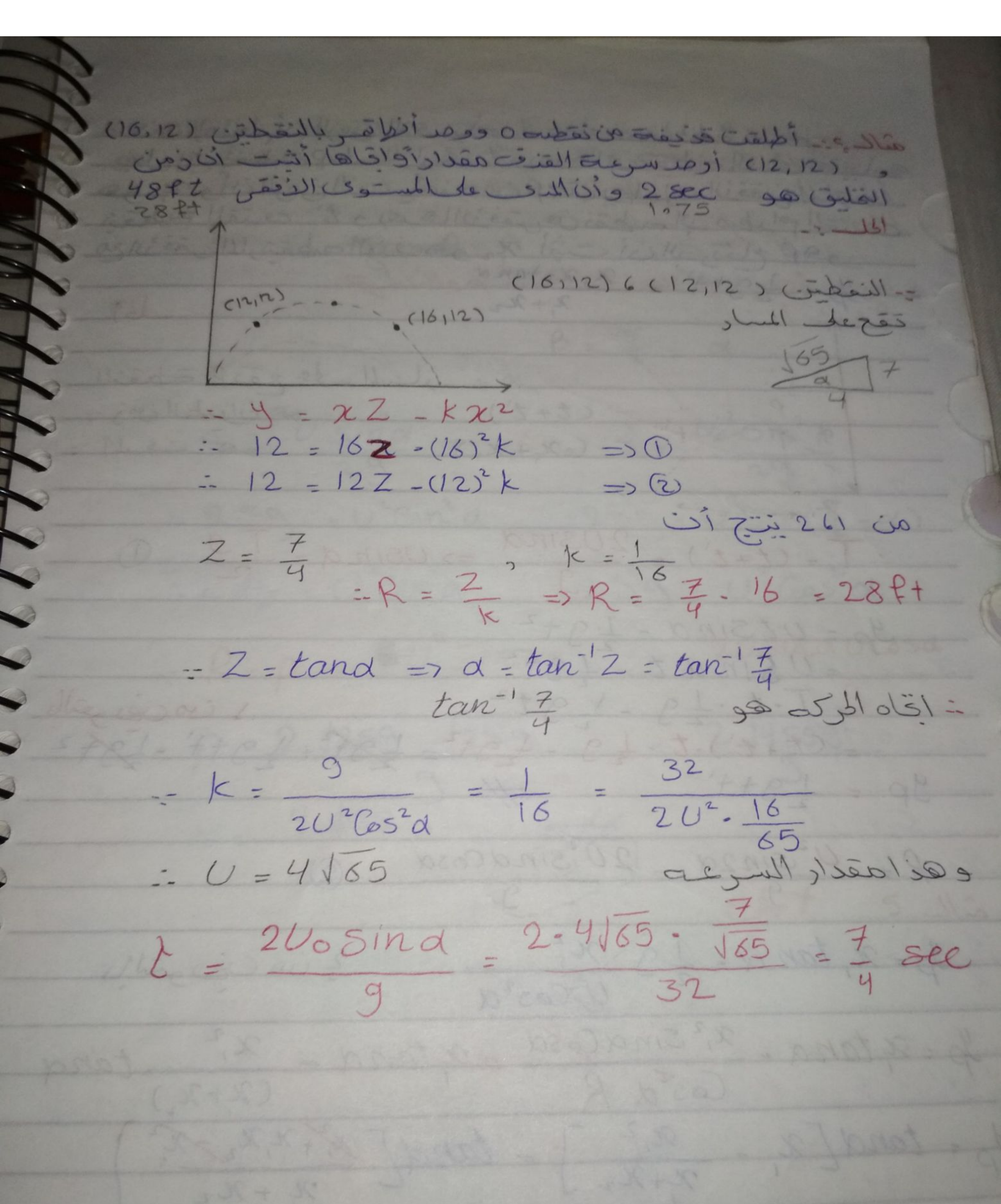
لمعرفة الزمن

$$x = Ut\cos\alpha \Rightarrow t = \frac{x}{U\cos\alpha}$$

$$\therefore t = \frac{16}{32\cdot 1/\sqrt{10}} \quad , \quad t = \frac{16}{32\cdot 1/\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{\sqrt{10}}{2}\ sec \quad . \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2}\ sec$$

$\sqrt{10}$, 3, 1, α , $\sqrt{2}$, 1, 1, α



مثال :- أطلقت قذيفة من نقطة O ووجد أنها تمر بالنقطتين (16,12) و (12,12) أوجد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً أثبت أن زمن التحليق هو 2 sec (1.75) وأن المدى على المستوى الأفقي 48 ft (28 ft)

الحل :-

∵ النقطتين (12,12) ، (16,12) تقع على المسار

$(12,12)$, $(16,12)$, $\sqrt{65}$, 7, 4, α

$\because y = xZ - kx^2$

$\therefore 12 = 16Z - (16)^2 k \Rightarrow ①$

$\therefore 12 = 12Z - (12)^2 k \Rightarrow ②$

من 1 ، 2 ينتج أن

$Z = \frac{7}{4}$ ، $k = \frac{1}{16}$

$\because R = \frac{Z}{k} \Rightarrow R = \frac{7}{4} \cdot 16 = 28 ft$

$\because Z = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} Z = \tan^{-1}\frac{7}{4}$

∴ اتجاه الحركة هو $\tan^{-1}\frac{7}{4}$

$\because k = \frac{g}{2U^2 \cos^2\alpha} = \frac{1}{16} = \frac{32}{2U^2 \cdot \frac{16}{65}}$

$\therefore U = 4\sqrt{65}$ وهذا مقدار السرعة

$t = \frac{2U_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{65} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}}}{32} = \frac{7}{4} sec$

مثال 3: إذا علم أن الزمن الذي يأخذه مقذوف من لحظة قذفه حتى يصل إلى نقطة p على المسار هو t وبعدها عن نقطة القذف أفقيا هو x_1 وأن الزمن الذي يأخذه من p حتى يصل إلى الأفقي المار بنقطة القذف t' وبعدها الأفقي عن نقطة الاصطدام المقذوف مع الأفقي المار بنقطة القذف هو x_2 أثبت أن الارتفاع p هو

$$y_p = \frac{1}{2} g t t' = \frac{x_1 x_2 \tan\alpha}{x_1 + x_2}$$

الحل

p ; t ; t' ; x_1 ; x_2

النقطة p تقع على المسار

∴ زمن الطيران هو $(t+t')$

∴ المدى هو (x_1+x_2)

$$\therefore T = (t+t') = \frac{2U\sin\alpha}{g} \Rightarrow U\sin\alpha = \frac{Tg}{2} \quad (1)$$

$$y_p = Ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= U\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= T \cdot t \cdot \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}gt^2$$

بالتعويض من 1

$$= (t+t') \cdot t \cdot \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gtt' - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_p = \frac{1}{2}gtt' \quad \#$$

$$R = \frac{U^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2U^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \quad (2)$$

$$y_p = x_1\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x_1^2}{U^2\cos^2\alpha}$$

بالتعويض من 2

$$y_p = x_1\tan\alpha - \frac{x_1^2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha\, R} = x_1\tan\alpha - \frac{x_1^2}{(x_1+x_2)}\tan\alpha$$

$$y_p = \tan\alpha\left[x_1 - \frac{x_1^2}{x_1+x_2}\right] = \tan\alpha\left[\frac{x_1^2 + x_1x_2 - x_1^2}{x_1+x_2}\right]$$

$$y_p = \tan\alpha\left[\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right] \quad \#$$

مثال 4 إذا كان المدى لمقذوف على سطح مستوى أفقي مار بنقطة القذف هو P وكان S' ، S هما أقصى ارتفاعين المساوي المكين أثبت أن $P = 4\sqrt{SS'}$

الحل:-

S, S', g ، $R = P$

نفرض أن زاوية القذف الأولى α والثانية β بحيث أن

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\therefore S = \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad , \quad S' = \frac{U_0^2 \sin^2 \beta}{2g}$$

$$\therefore 2Sg = U^2 \sin^2 \alpha \quad , \quad 2S'g = U^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\therefore 2Sg = U^2 \sin^2 \alpha \quad , \quad 2S'g = U^2 \cos^2 \alpha$$

$$\therefore R = P = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2U \sin \alpha \, U \cos \alpha}{g}$$

$$\therefore P = \frac{2\sqrt{2Sg} \cdot \sqrt{2S'g}}{g} = \frac{2\sqrt{4SS'g^2}}{g}$$

$$= 4\sqrt{SS'}$$

#

مثال 5 Chet

المقذوفات 5

مثال: قذف جسيم بسرعة U في اتجاه يصنع زاوية β مع الرأسي على مستوى يميل على الرأسي بزاوية 2β وفي اتجاه خط أكبر ميل المستوى. أثبت أن زمن الطيران $\frac{U}{g}$ والمدى $\frac{U^2}{2g}$ وأن الجسم يصل المستوى عمودياً واتجاه حركته عندئذ يكون $U\sin\beta$

الحل

المستوى المائل بسرعة على اتجاه هذه الحركة في اتجاه خط أكبر ميل أي في اتجاه y, x أما الوزن فهو رأسي في اتجاه $\hat{e}$.

y, $U_0\cos\beta\sin\beta$, $\hat{e}_2$, $U_0\cos\beta$, j, i, $U_0\cos^2\beta$, x, β, β, $\hat{e}_1$

الشروط الابتدائية:

$x=0 \,,\; y=0 \,,\; t=0$

$$F = m a$$

$$a = (\ddot{x}\, i + \ddot{y}\, j) = -g\hat{e} \quad \rightarrow ①$$

$$m a = -mg\hat{e}_2$$

بضرب قياسي في i, j

$$\therefore \ddot{x} = -g\cos 2\beta \quad , \quad \ddot{y} = -g\sin 2\beta$$

بالتكامل بالنسبة للزمن

$$\dot{x} = -gt\cos 2\beta + c_1 \quad , \quad \dot{y} = -gt\sin 2\beta + c_2$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$c_1 = U_0\cos^2\beta \quad , \quad c_2 = U_0\sin\beta\cos\beta$$

$$\therefore \dot{x} = -gt\cos 2\beta + U_0\cos^2\beta \quad , \quad \dot{y} = -gt\sin 2\beta + U_0\sin\beta\cos\beta$$

بالتكامل بالنسبة للزمن

$$x = \frac{-1}{2}gt^2\cos 2\beta + U_0 t\cos^2\beta + c_3 \quad , \quad y = \frac{-1}{2}gt^2\sin 2\beta + U_0 t\sin\beta\cos\beta + c_4$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية

$$c_3 = 0 \quad , \quad c_4 = 0$$

$$x = \frac{-1}{2}gt\cos 2\beta + U_0 t\cos^2\beta \quad , \quad y = \frac{-1}{2}gt^2\sin 2\beta + U_0 t\sin\beta\cos\beta$$

لمعرفة زمن الطيران $y=0$ عند $t=T$

$$y = \frac{-1}{2}gt^2\sin 2\beta + U_0 t\sin\beta\cos\beta$$

$0 = t\left(\frac{-1}{2} g \sin 2\beta \, t + U_0 \sin\beta \cos\beta\right)$

$t = 0$ OR القوس $= 0$

$\therefore \frac{-1}{2} g \sin 2\beta \, t + U_0 \sin\beta \cos\beta = 0$

$\frac{1}{2} g \sin(2\beta) t = U_0 \sin\beta \cos\beta$

$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2 \sin\beta \cos\beta \cdot gT = U_0 \sin\beta \cos\beta$

$gT = U_0 \Rightarrow T = \frac{U_0}{g}$ #

$t = T = \frac{U_0}{g}$ عند $x = R$ لمعرفة المدى

$\therefore x = \frac{-1}{2} g t^2 \cos 2\beta + U_0 t \cos^2\beta$

$\therefore x = t\left(\frac{-1}{2} g t \cos 2\beta + U_0 \cos^2\beta\right)$.

$\therefore R = \frac{-1}{2} \cdot g \cdot \frac{U_0^2}{g^2} [2\cos^2\beta - 1] + U_0 \cdot \frac{U_0}{g} \cos^2\beta$

$\therefore R = \frac{U_0^2}{g}\left(\frac{-1}{2}(2\cos^2\beta - 1)\right) + \frac{U_0^2}{g} \cos^2\beta$

$R = \frac{U_0^2}{g}\left[-\cos^2\beta + \frac{1}{2} + \cos^2\beta\right] = \frac{U_0^2}{2g}$ #

لمعرفة سرعة الجسم لحظة وصوله إلى المستوى المائل

$x = R \quad , \quad y = 0 \quad , \quad t = T$

$\dot{x} = -g t \cos 2\beta + U_0 \cos^2\beta$

$\dot{x} = -g \frac{U_0}{g} [2\cos^2\beta - 1] + U_0 \cos^2\beta$

$\dot{x} = U_0 [1 - 2\cos^2\beta + \cos^2\beta] = U_0 [1 - \cos^2\beta]$

$\dot{x} = U_0 \sin^2\beta$ ①

$\dot{y} = -g t \sin 2\beta + U_0 \sin\beta \cos\beta$

$\dot{y} = -g \cdot \frac{U_0}{g}(2\sin\beta\cos\beta) + U_0 \sin\beta \cos\beta$

$\dot{y} = U_0(-2\sin\beta\cos\beta + \sin\beta\cos\beta) = -U_0 \sin\beta\cos\beta \Rightarrow$ ②

$\therefore |\underline{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{U_0^2 \sin^4\beta + U_0^2 \sin^2\beta \cos^2\beta}$

$= \sqrt{U_0^2 \sin^2\beta (\sin^2\beta + \cos^2\beta)} = U_0 \sin\beta$ #

لإثبات اتجاه الحركة عمودي على اتجاه القذف :-

أولاً: اتجاه الحركة هو اتجاه السرعة ، اتجاه القذف اتجاه السرعة الابتدائية إذا كان عمودي

ثانياً: عند ضرب متجه السرعة ضرب قياسي مع متجه السرعة الابتدائية كان الناتج صفر دل ذلك

$\underline{U_0} = U_0 \cos^2\beta \, \underline{i} + \underline{U_0} \sin\beta \cos\beta \, \underline{j}$

$\underline{V} = U_0 \sin^2\beta \, \underline{i} - U_0 \sin\beta \cos\beta \, \underline{j}$

$\underline{U_0} \cdot \underline{V} = (U_0 \cos^2\beta \underline{i} + U_0 \sin\beta \cos\beta \underline{j})(U_0 \sin^2\beta \underline{i} - U_0 \sin\beta \cos\beta \underline{j})$

$= U_0^2 \cos^2\beta \sin^2\beta - U_0^2 \sin^2\beta \cos^2\beta = 0$ #

مبدأ ثبوت الطاقة

⇐ الشغل :- هو تكامل القوة بالنسبة للإزاحة .

$\therefore w = \int \underline{f} \cdot \underline{dr}$

$\therefore \underline{f} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

المجال الاتجاهي :- هو دالة عند كل نقطة في الفراغ تعطي دوال ذات القيمة المتجهة .

$\underline{dr} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$

$\underline{F} = F_1\underline{i} + f_2\underline{j} + f_3\underline{k}$

وعند الضرب قياسي

$\underline{F} \cdot \underline{dr} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

⇐ أنواع المعادلات البارامترية

① الخط المستقيم

(x_2, y_2, z_2)

(x_1, y_1, z_1)

* $r = r_1 + (r_2 - r_1)t$
* $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$
* $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$
* $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$

(ه) الكارتيزيه :-

* $y = x^2$
* $x = t$
* $y = t^2$

(ه) الدائرة :-

* $x = a\cos t$
* $y = a\sin t$

(ه) اللولبية :-

* $x = a\cos wt$
* $y = a\sin wt$
* $z = bt$

حيث t تنطبق في المسائل .

المجال المحافظ :- هو المجال الذى لا يتغير مع الزمن

شروطه :- ① لا يرتبط بالزمن ② $\underline{\nabla} \wedge \underline{f} = 0$

حيث

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

$$\therefore \underline{\nabla} \wedge \underline{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

تكون $\underline{f}$ قوة محافظة تنشئ مجال محافظ

مثال: أثبت أن القوى $f = (x^2y - z^2)\underline{i} + (3xyz + xz^2)\underline{j} + (2x^2yz + yz^2)\underline{k}$ غير محافظ.

$$\nabla \wedge f = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (x^2y - z^2) & (3xyz + xz^2) & (2x^2yz + yz^2) \end{vmatrix} =$$

$$\nabla \wedge f = (2x^2z + z^2 - (3xy + 2xz))\underline{i} - (4xyz - 2z)\underline{j} + (3yz + z^2 - x^2)\underline{k}$$

$\therefore \nabla \wedge f \neq 0 \Rightarrow$ القوى f غير محافظة

ملحوظة: القوى المحافظة لا تعتمد على الزمن أو المسار

متى يوجد داله جهد؟ عندما تكون القوة محافظة $F = -\nabla \cdot \psi$

إذا كانت (f) مجال محافظ فإن داله الجهد تعطى من الجهود الناظرة للقوة

مثال: أثبت أن القوة التاليه محافظة وأوجد دالة الجهد $F = (2xy + z^3)\underline{i} + x^2\underline{j} + 3xz^2\underline{k}$

$$\nabla \wedge f = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} =$$

$$\nabla \wedge f = (0 - 0)\underline{i} - (3z^2 - 3z^2)\underline{j} + (2x - 2x)\underline{k}$$

$$= 0\underline{i} - 0\underline{j} + 0\underline{k} = 0$$

$\therefore$ القوى قوى محافظة

معرفة داله الجهد

$$F = -\nabla \cdot \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\underline{i} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\underline{j} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\underline{k}$$

$$\therefore -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2xy + z^3 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2xy - z^3 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x^2 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} = 3xz^2 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = -3xz^2 \quad (3)$$

أولاً من 1

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2xy + z^3$$

بالتكامل بالنسبة لـ x

$$\psi = -x^2y + z^3x + g_{(y,z)} \quad 2)$$

بالتفاضل بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -x^2 + g_y(y,z)$$

بالتعويض بـ 2

$$-x^2 = -x^2 + g_y(y,z)$$

$$\therefore g_y(y,z) = \text{Zero}$$

بالتكامل بالنسبة لـ y

$$g_{(y,z)} = h(z) \Rightarrow 4)$$

بالتعويض في 5)

$$\psi = -x^2y + z^3x + h(z)$$

بالتفاضل بالنسبة لـ Z

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -3xz^2 + h'(z)$$

بالتعويض بـ 3

$$-3xz^2 = -3xz^2 + h'(z)$$

$$\therefore h'(z) = 0$$

بالتكامل بالنسبة لـ Z

$$h(z) = \text{Constant}$$

$$\therefore \psi = -x^2y - z^3x + c$$

سكشن ٤

مثال ١ الدكتور حله فى محاضرة رقم 5

مثال ٢ أوجد الثوابت a, b, c التى تجعل القوة التالية محافظة

$\underline{f} = (x+2y+az)\underline{i} + (bx-3y-z)\underline{j} + (4x+cy+2z)\underline{k}$

∵ القوى محافظة

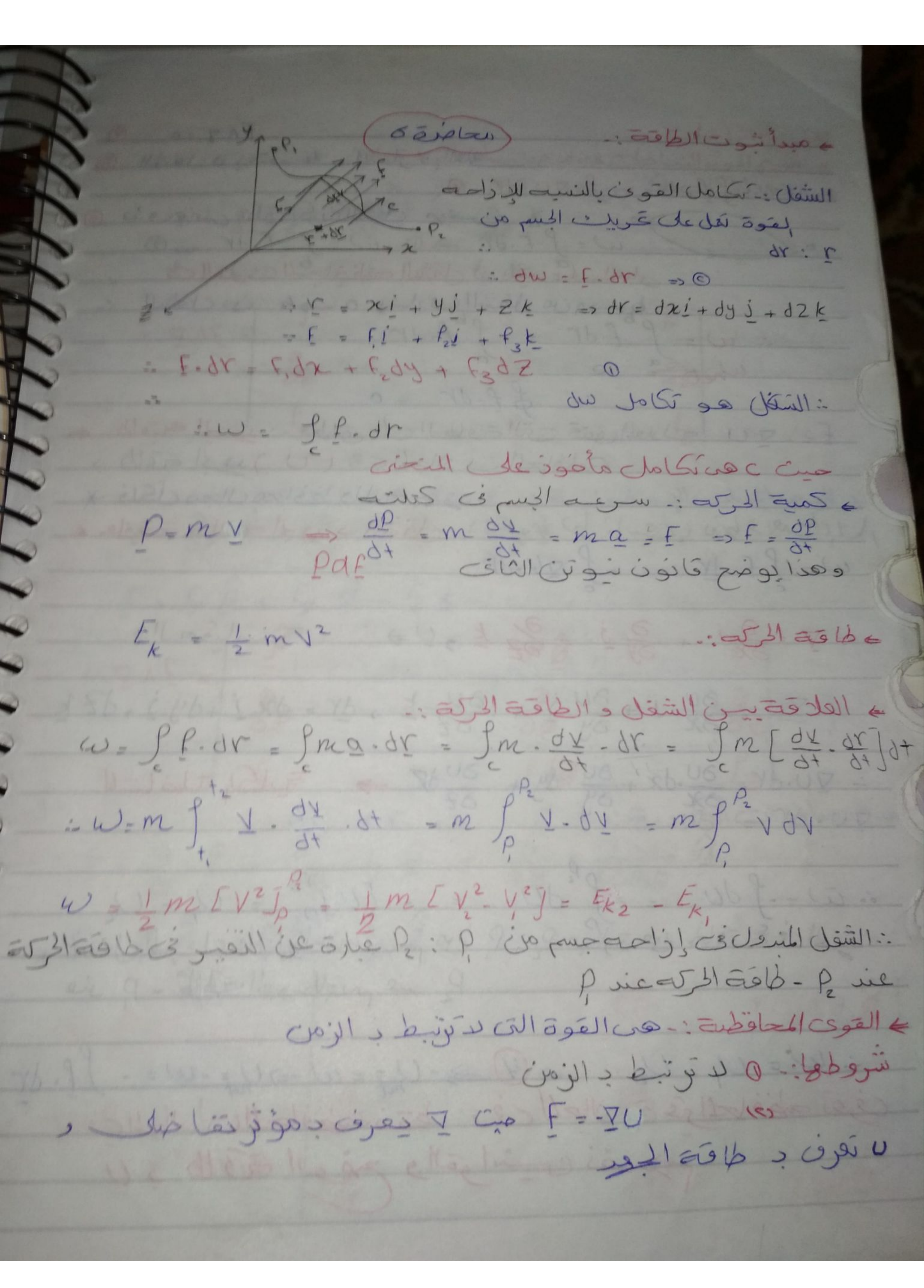
$$\therefore \nabla \wedge \underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (x+2y+az) & (bx-3y-z) & (4x+cy+2z) \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore [c+1]\underline{i} - [4-a]\underline{j} + [2-b]\underline{k} = 0$$

$$\therefore c = -1 \quad , a = 4 \quad , b = 2$$

مثال ٣

مثال 4 الدكتور حله فى محاضرة رقم 5



المحاضرة ٥

← مبدأ ثبوت الطاقة :-

الشغل :- تكامل القوى بالنسبة للإزاحة لقوة تعمل على تحريك الجسم من r : dr

$$\therefore dW = F \cdot dr \Rightarrow ②$$

$$\because r = x i + y j + z k \Rightarrow dr = dx\, i + dy\, j + dz\, k$$

$$\because F = f_1 i + f_2 j + f_3 k$$

$$\therefore F \cdot dr = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \quad ①$$

∴ الشغل هو تكامل dw

$$\therefore W = \int_c F \cdot dr$$

حيث c هي تكامل مأخوذ على المنحنى

← كمية الحركة :- سرعة الجسم في كتلته

$$P = m v \Rightarrow \frac{dP}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m a = F \Rightarrow F = \frac{dP}{dt}$$

$P \propto F$

وهذا يوضح قانون نيوتن الثاني

← طاقة الحركة :-

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

← العلاقة بين الشغل و الطاقة الحركة :-

$$W = \int_c F \cdot dr = \int_c m a \cdot dr = \int_c m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dr = \int_c m \left[\frac{dv}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}\right] dt$$

$$\therefore W = m \int_{t_1}^{t_2} v \cdot \frac{dv}{dt} \, dt = m \int_{P_1}^{P_2} v \cdot dv = m \int_{P_1}^{P_2} v \, dv$$

$$W = \frac{1}{2} m [v^2]_{P_1}^{P_2} = \frac{1}{2} m [v_2^2 - v_1^2] = E_{k_2} - E_{k_1}$$

∴ الشغل المبذول في إزاحة جسم من P_1 : P_2 عبارة عن التغير في طاقة الحركة عند P_2 - طاقة الحركة عند P_1

← القوى المحافظة :- هي القوة التي لا ترتبط بـ الزمن

شروطها :- ① لا ترتبط بـ الزمن

② $F = -\nabla U$ حيث ∇ يعرف بـ مؤثر تفاضلي ، U تعرف بـ طاقة الجهد

③ $F \wedge \nabla = 0$

④ الشغل لا يعتمد على المسار وبالتالى $w = \oint F \cdot dr = \oint -\nabla U \cdot dr$ ④

a b

⑤ لذى منحنى مغلق يكون الشغل صفر

$w = \int_a^b F \cdot dr \Rightarrow$ ① $w = \int_b^a F \cdot dr \Rightarrow$ ②

∵ القوى المحافظة الشغل لا يعتمد على المسار

∴ الشغل من $a \to b$ يساوى الشغل من $b \to a$ $\therefore w = \int_a^b F \cdot dr = -\int_a^b F \cdot dr$

$w_{net} = 0$

$F = -\nabla U$

U الدالة التى تحقق المعادلة $\therefore \oint F \cdot dr = 0$

⇐ طاقة الجهد :- يطلق على الطاقة فى المجالات المحافظة

⇐ طاقة الجهد (U) لانها لا تعتمد على المسار

* فلكل مجال محافظ دالة جهد (لا يوجد لها ثابت)

⇐ علاقة دالة الجهد بالشغل $w = \int_c F \cdot dr = -\int_c \nabla U \cdot dr$

$\because \nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$, $U \Rightarrow$ دالة قياسية

$\therefore \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$, $dr = dx\, i + dy\, j + dz\, k$

$\therefore \nabla U \cdot dr = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \Rightarrow$ المتفاضلة الكلية

$\nabla U \cdot dr = dU$

$\therefore w = -\int dU = -\int_{P_1}^{P_2} dU = -[U]_{P_1}^{P_2} = U_1 - U_2$ ∴

* الشغل المبذول على إزاحة جسم من P_1 : P_2 عبارة عن طاقة فى الجهد عند P_1 - طاقة الجهد للجسم عند P_2

$\therefore w = U_1 - U_2 \Rightarrow$ ④ $\Rightarrow -U_{net} = w \Rightarrow U_{net} = -w = -\int F \cdot dr$

فى المجالات المحافظة فقط وفى المجالات غير المحافظة تعرف U بـ طاقة الوضع والقوانين نفسها

المؤثر التفاضلي :-

* صيغ المؤثر التفاضلي في الإحداثيات المختلفة :-

* الإحداثيات الكارتيزية (x , y , z) :-

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$$

$$\underline{f} = f_x \underline{i} + f_y \underline{j} + f_z \underline{k}$$

$$\nabla \wedge \underline{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

* الإحداثيات الإسطوانية (ρ , ∅ , z)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \underline{\hat{\rho}} + \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \frac{1}{\rho} \underline{\hat{\phi}} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$$

$$\underline{f} = f_\rho \underline{\hat{\rho}} + f_\phi \underline{\hat{\phi}} + f_z \underline{k}$$

$$\therefore \nabla \wedge \underline{f} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & k \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\phi & f_z \end{vmatrix} \times \frac{1}{\rho}$$

* الإحداثيات الكروية :- (r , θ , ∅)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \underline{\hat{r}} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r} \underline{\hat{\theta}} + \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \frac{1}{r\sin\theta} \underline{\hat{\phi}}$$

$$\underline{f} = f_r \underline{\hat{r}} + f_\theta \underline{\hat{\theta}} + f_\phi \underline{\hat{\phi}}$$

$$\therefore \nabla \wedge \underline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\, \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f_r & r f_\theta & r\sin\theta\, f_\phi \end{vmatrix}$$

← مبدأ ثبوت الطاقة :-

* من علاقة الشغل بـ طاقة الحركة عند موضعين

$$W = E_{k_2} - E_{k_1} \quad ①$$

* من علاقة الشغل بـ طاقة الجهد عند موضعين

$$W = U_1 - U_2 \quad ②$$

من ١ ، ٢ ينتج أن

$$U_1 - U_2 = E_{k_2} - E_{k_1} \Rightarrow U_1 + E_{k_1} = U_2 + E_{k_2}$$

∴ مجموع طاقتي الحركة والجهد عند أي نقطة على المسار = مقدار ثابت وهو $U + E_k = E$ وهذا هو مبدأ ثبوت الطاقة

مثال :- جسم كتلته m يتحرك في المستوى xoy حيث يكون متجه الموضع هو $\vec{r} = (a\cos\omega t)\hat{i} + (b\sin\omega t)\hat{j}$ حيث a ، b ، ω ثوابت موجبة ، $a > b$

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$

① بين أن الجسم يتحرك في قطع ناقص .
② أثبت أن القوة المؤثرة على الجسم تمر دائماً بنقطة الأصل .
③ أثبت أن المجال القوة مجال محافظ وأوجد دالة الجهد المناظرة
④ أوجد طاقة الحركة عند A ، B حيث $A = (a, 0)$ ، $B(0, b)$
⑤ أوجد الشغل المبذول في تحريك الجسيم من A إلى B .
⑥ بين أن الشغل المبذول بواسطة القوة في تحريك الجسيم مرة واحدة حول القطع الناقص يساوي صفر .

الحل :-

المطلوب الأول :-

$$x = a\cos\omega t \quad , \quad y = b\sin\omega t$$

$$\frac{x}{a} = \cos\omega t \quad , \quad \frac{y}{b} = \sin\omega t$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\omega t \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\omega t$$

بالجمع

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$

#

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المطلوب الثاني :-

من نيوتن الثاني

$$F = m\underline{a} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\underline{i} + \omega b\cos\omega t\,\underline{j} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t\,\underline{i} - \omega^2 b\sin\omega t\,\underline{j} = -\omega^2\underline{r} \quad (2)$$

$$\therefore \underline{F} = -m\omega^2\underline{r} = -m\omega^2 r\,\hat{\underline{r}} \quad //$$

اتجاه القوى دائما عكس اتجاه $\hat{\underline{r}}$ واتجاه $\hat{\underline{r}}$ من نقط الأصل إلى خارجها وبالتالي عكس الاتجاه يكون إلى نقطة الأصل .

ملحوظة : القوة تكون دائما إتجاه نقطة الأصل في الأشكال الدائرية والبيضوية وهي ما تعرف بـ الجذب المركزي .

المطلوب الثالث :-

$$\underline{F} = -m\omega^2 r\,\hat{\underline{r}}$$

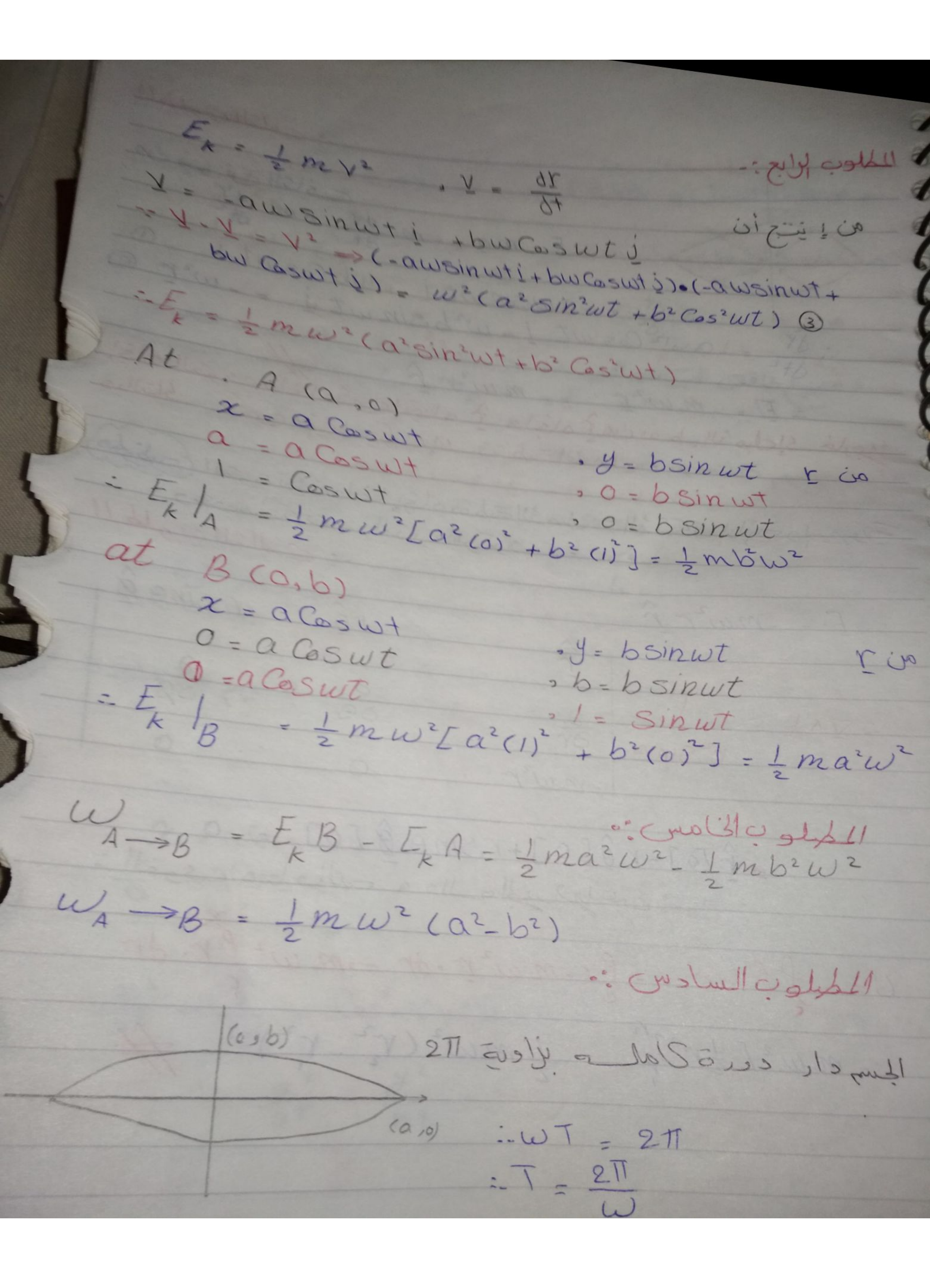
$$\therefore \nabla \wedge \underline{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\underline{r}} & r\hat{\underline{\theta}} & r\sin\theta\,\hat{\underline{\phi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ -m\omega^2 r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\underline{r}}[0] - r\hat{\underline{\theta}}[0] + r\sin\theta\,\hat{\underline{\phi}}[0] = 0$$

∴ القوى محافظة و داله الجهد لها هي :-

$$U = -\int_c \underline{F}\cdot d\underline{r} = -\int_c (-m\omega^2\underline{r})\cdot d\underline{r} = +m\omega^2\int_{r_1}^{r_2} \underline{r}\cdot d\underline{r}$$

$$= m\omega^2\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2}m\omega^2(r_2^2 - r_1^2) \quad \#$$



المطلوب الرابع :-

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

من $\underline{r}$ ينتج أن

$$\underline{v} = -a\omega \sin\omega t \, \underline{i} + b\omega \cos\omega t \, \underline{j}$$

$$\therefore \underline{v} \cdot \underline{v} = v^2 \Rightarrow (-a\omega \sin\omega t \, \underline{i} + b\omega \cos\omega t \, \underline{j}) \cdot (-a\omega \sin\omega t + b\omega \cos\omega t \, \underline{j}) = \omega^2 (a^2 \sin^2\omega t + b^2 \cos^2\omega t) \quad (3)$$

$$\therefore E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \sin^2\omega t + b^2 \cos^2\omega t)$$

At $A(a, 0)$

من $\underline{r}$

$$x = a\cos\omega t \qquad y = b\sin\omega t$$

$$a = a\cos\omega t \qquad 0 = b\sin\omega t$$

$$1 = \cos\omega t \qquad 0 = b\sin\omega t$$

$$\therefore E_k \big|_A = \frac{1}{2} m \omega^2 [a^2 (0)^2 + b^2 (1)^2] = \frac{1}{2} m b^2 \omega^2$$

at $B(0, b)$

من $\underline{r}$

$$x = a\cos\omega t \qquad y = b\sin\omega t$$

$$0 = a\cos\omega t \qquad b = b\sin\omega t$$

$$0 = a\cos\omega t \qquad 1 = \sin\omega t$$

$$\therefore E_k \big|_B = \frac{1}{2} m \omega^2 [a^2 (1)^2 + b^2 (0)^2] = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

المطلوب الخامس :-

$$W_{A \to B} = E_k B - E_k A = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m b^2 \omega^2$$

$$W_{A \to B} = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - b^2)$$

المطلوب السادس :-

الجسم دار دورة كاملة بزاوية 2π

$$\therefore \omega T = 2\pi$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega}$$

الجسم لكي يدور دورة كاملة بدءاً من $t=0$ إلى $t = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\therefore W = \int_0 \underline{f} \cdot d\underline{r} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \underline{f} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt \longrightarrow (4)$$

من نيوتن الثاني

$$\underline{f} = m\underline{a} = m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = -m\omega^2[a\cos\omega t\,\underline{i} + b\sin\omega t\,\underline{j})$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = -\omega a\sin\omega t\,\underline{i} + \omega b\cos\omega t\,\underline{j} = \omega(-a\sin\omega t\,\underline{i} + b\cos\omega t\,\underline{j})$$

$$\therefore \underline{f} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = -m\omega^3[-a^2\sin\omega t\cos\omega t + b^2\cos\omega t\sin\omega t)$$

$$\underline{f} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = -m\omega^3(b^2 - a^2)\sin\omega t\cos\omega t \Rightarrow (5)$$

بالتعويض من 5 في 4

$$\therefore W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} -m\omega^3(b^2-a^2)\sin\omega t\cos\omega t\, dt$$

$$= -m\omega^3(b^2-a^2)\,\omega^{-1}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \omega\sin\omega t\cos\omega t\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}m\omega^2(b^2-a^2)\left[\sin^2\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= -\frac{1}{2}m\omega^2(b^2-a^2)[\sin^2 2\pi - \sin^2 0] = 0$$

مثال جسيم كتلته m يتحرك على المحور x تحت تأثير مجال قوة محافظة جهدها $U(x)$ إذا كان الجسيم يشغل الموضعين x_1 و x_2 عند اللحظتين t_1 ، t_2 على التوالي فاثبت أن

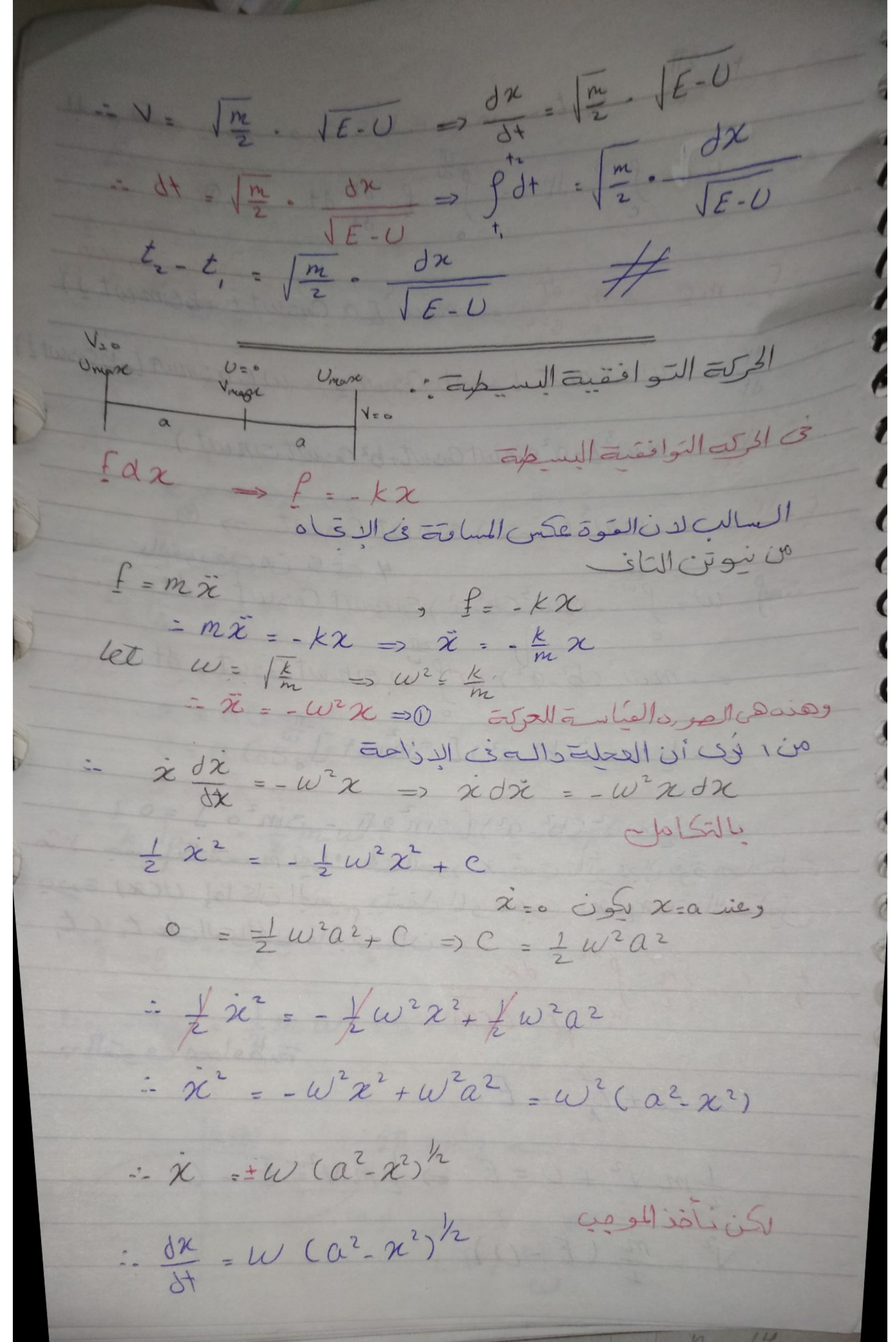
$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

$\because$ القوى محافظة

$$\therefore U + E_k = E$$

$$\frac{1}{2}mV^2 + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 = E - U$$

$$\therefore V^2 = \frac{m}{2}(E - U)$$



$$\therefore V = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{E-U} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \sqrt{E-U}$$

$$\therefore dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E-U}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E-U}} \quad \#$$

الحركة التوافقية البسيطة :.

فى الحركة التوافقية البسيطة

$f \alpha x \Rightarrow f = -kx$

السالب لان القوة عكس المسافة فى الإتجاه

من نيوتن الثانى

$$f = m\ddot{x} \quad , \quad f = -kx$$

$$\therefore m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

let $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow ①$$

وهذه هى الصورة القياسية للحركة

من ١ نرى أن العجلة دالة فى الإزاحة

$$\therefore \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega^2 x \Rightarrow \dot{x}\,d\dot{x} = -\omega^2 x\,dx$$

بالتكامل

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + c$$

وعند $x=a$ يكون $\dot{x}=0$

$$0 = -\frac{1}{2}\omega^2 a^2 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\omega^2 a^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{x}^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 a^2$$

$$\therefore \dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + \omega^2 a^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

$$\therefore \dot{x} = \pm\omega(a^2 - x^2)^{1/2}$$

لكن نأخذ الموجب

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \omega(a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\omega dt = \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

بالتكامل

$$\omega t + C_2 = \sin^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow \sin^{-1}\frac{x}{a} = \omega t + \epsilon$$

حيث ϵ ثابت التكامل وهو زاوية الطور

* بتأثير sin للطرفين

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t + \epsilon) \Rightarrow x = a \sin(\omega t + \epsilon)$$

$$\therefore x = a[\sin\omega t \cos\epsilon + \sin\epsilon \cos\omega t)$$

Let $A = a\cos\epsilon$, $B = a\sin\epsilon$

$$\therefore x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

* الزمن الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{second}$$

* التردد (ν)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{second}^{-1}$$

* السعة (a)

$$\therefore A = a\cos\epsilon \quad , \quad B = a\sin\epsilon$$

بتربيع الطرفين والجمع

$$A^2 + B^2 = a^2 \Rightarrow a = (A^2 + B^2)^{1/2}$$

* أقصى سرعة (V_{max})

$$V = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

at : $V = V_{max}$ $\quad x = 0$

$$\therefore V_{max} = \pm\omega a$$

مثال:- تتحرك نقطة مادية حركة توافقية بسيطة حول O فإذا كانت إزاحتها عن O في ثلاث ثوان متتالية هي x_1 , x_2 , x_3 في نفس الاتجاه فأثبت أن الزمن الدوري هو $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{x_1+x_3}{2x_2}\right)}$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} \xrightarrow[\text{إلى هذا}]{\text{لابد أن نصل}} \omega = \cos^{-1}\frac{x_1+x_3}{2x_2}$$

$t-1 \quad , \quad t \quad , \quad t+1$

نفرض أن الثواني المتتالية

$$\therefore x = a\sin(\omega t)$$

لم نضع ε لأن الحركة فقط مستقيم ولو أضفناها هتحذف عند الحل

$$\therefore x_1 = a\sin(\omega(t-1)) \quad , \quad x_2 = a\sin\omega t \quad , \quad x_3 = a\sin(\omega(t+1))$$

$$\therefore x_1 + x_3 = a[\sin(\omega t - \omega) + \sin(\omega t + \omega)]$$

$$= a[\sin\omega t\cos\omega - \cos\omega t\sin\omega + \sin\omega t\cos\omega + \cos\omega t\sin\omega]$$

$$= a[2\sin\omega t\cos\omega] = 2a\sin\omega t\cos\omega \quad (1)$$

$$2x_2 = 2a\sin\omega t \quad (2)$$

بقسمة $2 \div 1$

$$\frac{x_1+x_3}{2x_2} = \frac{2a\sin\omega t\cos\omega}{2a\sin\omega t} = \cos\omega$$

$$\therefore \omega = \cos^{-1}\frac{x_1+x_2}{2x_2}$$

#

مثال:- إذا كانت ازاحة نقطة مادية عند الزمن t تعطى بالمعادلة

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

أثبت أن الحركة توافقية بسيطة ثم أوجد سعة الذبذبة و ε

$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\therefore \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\therefore \ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

$\therefore \ddot{x} = -\omega^2[A\cos\omega t - B\sin\omega t]$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ ∴ الحركه توافقية بسيطة لأنها على الصورة العامة

∴ الحركه توافقية بسيطة

$\therefore x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\therefore a^2 = A^2 + B^2$ #

$\therefore x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$$\therefore x = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right]$$

$$\therefore x = \sqrt{A^2+B^2}\,[\sin\alpha\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t]$$

$$x = \sqrt{A^2+B^2}\,[\sin(\omega t + \alpha)]$$

$$x = a\sin(\omega t + \alpha)$$

وبالقياس د الصورة القياسية

$$x = a\sin(\omega t + \epsilon)$$

$$\therefore \epsilon = \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

$\sqrt{A^2+B^2}$

A

B

مبدأ بقاء الطاقة   سكشن 5

جسيم كتلته m يتحرك على محور x بقوة $\underline{f} = \frac{-k}{x^2}\underline{i}$ حيث k ثابت إذا بدأ الجسيم الحركة من سكون عند الموضع $x = a$ اثبت أن زمن الوصول لنقطة الأصل يساوي $\frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{ma}{2k}}$

$$\because \underline{f} = \frac{-k}{x^2}\underline{i} = m\ddot{x} = m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

$$\therefore \dot{x}\,d\dot{x} = \frac{-k}{mx^2}dx \Rightarrow \int \dot{x}\,d\dot{x} = \frac{-k}{m}\int x^{-2}dx$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{k}{mx} + c_1$$

at $\dot{x} = 0$, $x = a$ $\Rightarrow c_1 = \frac{-k}{ma}$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{k}{mx} - \frac{k}{ma} = \frac{k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{k}{m}\left(\frac{a-x}{ax}\right)$$

$$\therefore \dot{x}^2 = \frac{2k}{m}\left(\frac{a-x}{ax}\right) \Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2k}{m}}\left(\frac{a-x}{ax}\right)^{1/2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m}}\left(\frac{a-x}{ax}\right)^{1/2}$$ $\Leftarrow$ الموجب مرفوض لان القوة سالبة

$$\therefore \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a-x}}dx = -\sqrt{\frac{2k}{m}}dt \Rightarrow \int \frac{\sqrt{xa}}{\sqrt{a-x}}dx = -\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{m}}\int dt$$

باستخدام التكامل بالتعويض

$$x = a\sin^2\theta \Rightarrow dx = 2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

at $x = a \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0 \longrightarrow \theta = 0$

$$\therefore \int_a^0 \frac{\sqrt{xa}}{\sqrt{a-x}}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta}}{\sqrt{a-a\sin^2\theta}}2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{a}\,\cos\theta}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = -\sqrt{\frac{2k}{m}}\int dt$$

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\theta\,d\theta = -\sqrt{\frac{2k}{m}}\int dt$$

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[1-\cos 2\theta]\,d\theta = \sqrt{\frac{2k}{m}} \int dt$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{a}} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\, t$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{a}} \left[\frac{\pi}{2}\right] = \sqrt{\frac{2k}{m}}\, t \Rightarrow t = \frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{ma}{2k}} \quad \#$$

مثال :- أثبت أن القوة المعطاه بـ القانون التربيع العكسي قوة محافظ ثم أوجد داله الجهد

$$f \propto \frac{1}{r^2} \Longrightarrow \underline{f} = \frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\therefore \underline{f} \wedge \underline{\nabla} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{\underline{r}} & r\hat{\underline{\theta}} & r\sin\theta\,\hat{\underline{\phi}} \\ \partial/\partial \underline{r} & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ \frac{-k}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{f} \wedge \underline{\nabla} = 0$$

∴ القوى قوى محافظه

$$\therefore U = -\int \underline{f}\cdot d\underline{r} = -\int \frac{-k}{r^2}\hat{\underline{r}} \cdot dr\,\hat{\underline{r}}$$

$$\therefore U = k\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow U = \frac{-k}{r} + C \quad \#$$

محاضرة 7

* تطبيقات هامة على الحركة التوافقية البسيطة :-

① البندول البسيط

$\because r = r\hat{r}$

$v = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$ استنتاجها بالمحاضرة 2

هذا المعادلات فى الصورة القطبية

$\because$ الخيط فى البندول غير مرن طوله l

و معادلة العجلة فى البندول هى

$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

$\because r = l = \text{Const} \Rightarrow \dot{l} = \ddot{l} = 0$

$\underline{a} = (0 - l\dot{\theta}^2)\hat{r} + (l\ddot{\theta} + 0)\hat{\theta}$

$\therefore \underline{a} = -l\dot{\theta}^2\hat{r} + l\ddot{\theta}\hat{\theta}$

$\because$ مركبات العجلة هى $l\dot{\theta}^2 , l\ddot{\theta}$

$mg\sin\theta$

$\because$ القوة المسبب للحركة هى القوى

من نيوتن الثانى

$\underline{f} = m\underline{a} = -mg\sin\theta$

$\because$ العجلة $\underline{a}$ فى اتجاه هى $l\ddot{\theta}$ و $-mg\sin\theta$

$\therefore m l\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$

هذه المعادلة تكاملها صعب جداً لذلك نأخذ الحالة التى يكون فيها $\theta << 1$ فإن هذا يعنى أن $\sin\theta = \theta$

$\therefore l\ddot{\theta} = -g\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$

let : $\omega^2 = \frac{g}{l}$

$\therefore \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ //

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ //

* قانون الهوك :-
الخيط في الهوك مرن
الشد في الخيط يتناسب مع الزيادة في طول الخيط

الزيادة في الخيط هي = (الطول بعد الشد - الطول الطبيعي) / الطول الطبيعي

$$\therefore T \propto \frac{(x+a)-a}{a} \Rightarrow T \propto \frac{x}{a}$$

$$\therefore T = \lambda \frac{x}{a} \Rightarrow \lambda$$ ثابت المرونة

$$\therefore T = \frac{\lambda}{a} x \Rightarrow T = k x \Rightarrow k$$ ثابت الزنبرك

حيث :- الزيادة في الخيط بعد الشد x ، الطول الطبيعي a

ملحوظة: المعادلة $T = kx$ قبل الحركة و x الزيادة قبل الحركة ولكن بعد الحركة فإن x لا تكون x التي في العلاقة $\ddot{x} = -\omega^2 x$ "هناك فرق بينهما كبير خلي بالك"

مثال :- علق زنبرك خفيف رأسيا من أحد طرفيه وحدث أن زاد طوله $20\,cm$ عندما علقت كتلة $5\,gm$ من طرفه الآخر ووضع الزنبرك والكتلة على منضدة أفقية ملساء حيث ثبتت نقطة التعليق عند E وشدت الكتلة مسافة $20\,cm$ بعيداً عن O أوجد معادلة الحركة ، التردد ، السعة ، الزمن الدوري

حيث $a = g$

$$T = f = mg = x k$$
$$5 \times 980 = 20 k \Rightarrow k = 245\,dyn/cm$$

الحركة في مستوى أفقي

$\therefore f = m\ddot{x} = -kx$

$\therefore 5\ddot{x} = -245x \Rightarrow \ddot{x} = -49x$ #

$\therefore$ الحركة توافقية بسيطة

$\therefore x = A\sin 7t + B\cos 7t$

at $t = 0$, $x = 20$, $\dot{x} = 0$

$20 = A\sin(0) + B\cos(0) \Rightarrow A = 20$

بالتفاضل للمعادلة x

$\dot{x} = 7A\cos 7t - 7B\sin 7t$

$0 = 140\cos(0) - 7B\sin(0)$

$0 = -7B \Rightarrow B = 0$

$\therefore x = 20\sin 7t$ #

$a = 20$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7}$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7}{2}\pi^{-1}$

مثال: علق جسيم وزنه $6\,wkg$ من نهاية زنبرك رأسي خفيف فأحدث استطالة $40\,cm$ أوجد موضع الجسيم عند أي لحظة إذا كانت في البداية قد شد $25\,cm$ إلى أسفل ثم تركت أوجد السعة والزمن الدوري والتردد

$T = kx \Rightarrow 6 = k \cdot 0.4 \Rightarrow k = \frac{6}{0.4} = 15\ J/m$

y, 0.4, وضع الاتزان

بعد الشد

$\sum F = mg - k(y + 0.4)$

$m\ddot{y} = 6 - 15(y + 0.4)$

$\therefore \omega = mg \Rightarrow 6 = m \times 9.8 \Rightarrow m = \frac{6}{9.8} = 0.6$

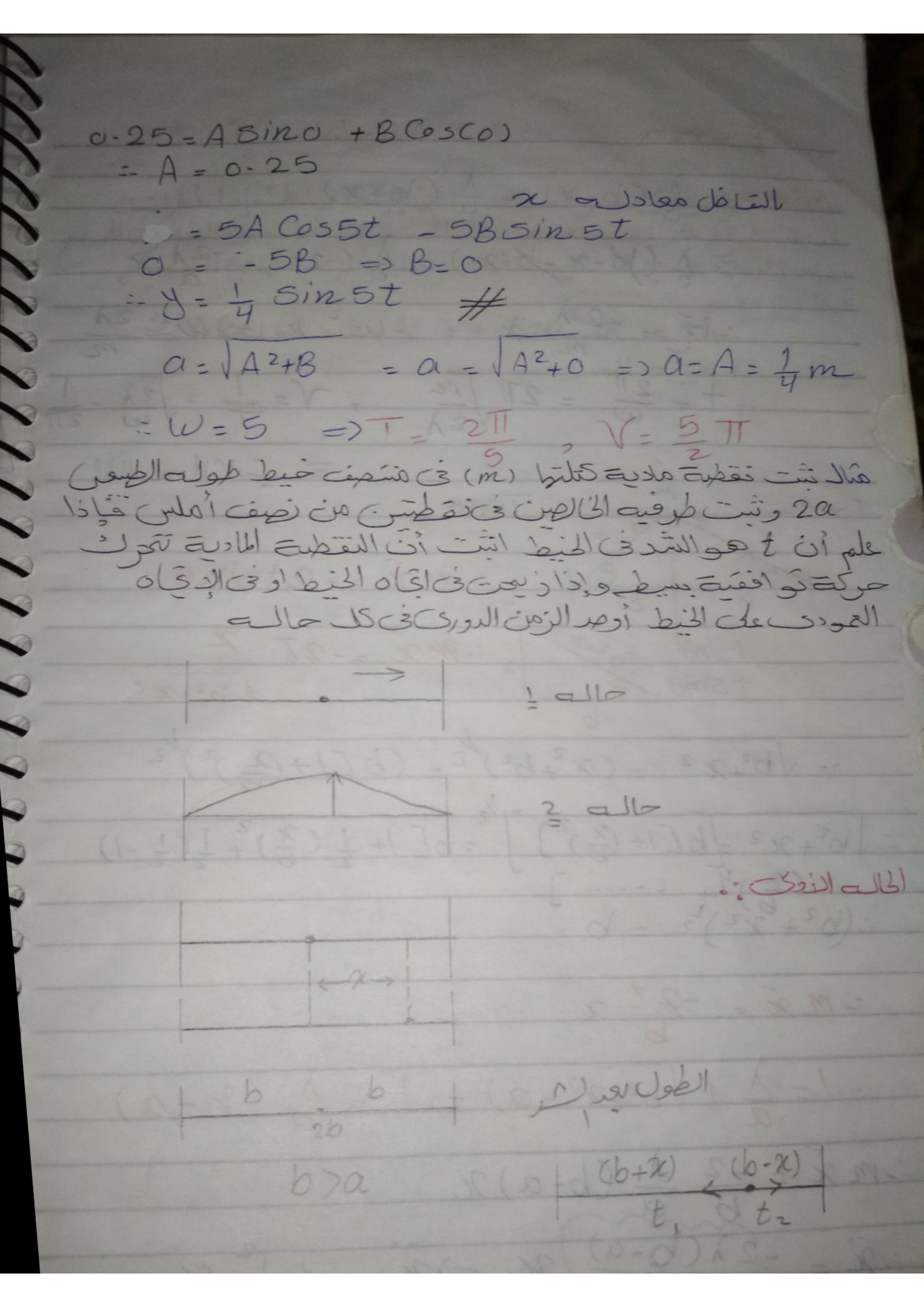
$0.6\ddot{y} = 6 - 15y - 6$

$0.6\ddot{y} = -15y \Rightarrow \ddot{y} = -25y$ #

$\therefore$ الحركة توافقية بسيطة

$\therefore \quad = A\sin 5t + B\cos 5t$

$, t = 0, \quad = 0.25m, \dot{y} = 0$



$0.25 = A\sin 0 + B\cos(0)$

$\therefore A = 0.25$

بالتفاضل معادلة x

$\dot{x} = 5A\cos 5t - 5B\sin 5t$

$0 = -5B \Rightarrow B = 0$

$\therefore y = \frac{1}{4}\sin 5t$ #

$a = \sqrt{A^2+B} = a = \sqrt{A^2+0} \Rightarrow a = A = \frac{1}{4}m$

$\therefore \omega = 5 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5} \quad , \quad V = \frac{5}{2}\pi$

مثال ثبت نقطة مادية كتلتها (m) فى منتصف خيط طوله الطبيعى 2a وثبت طرفيه الخاليين فى نقطتين من نصف أملس فإذا علم أن t هو الشد فى الخيط اثبت أن النقطة المادية تتحرك حركة توافقية بسيطة وإذا زيحت فى اتجاه الخيط او فى الإتجاه العمودى على الخيط أوجد الزمن الدورى فى كل حالة

الحالة الأولى :-

$\because F = ma \quad \Rightarrow m\ddot{x} = T_2 - T_1$

$m\ddot{x} = \frac{\lambda}{a}(b-x) - \frac{\lambda}{a}(b+x)$

$= \frac{\lambda}{a}(b - x - b - x) = \frac{\lambda}{a}(-2x) = \frac{-2\lambda}{a}x$

$\therefore \ddot{x} = \frac{-2\lambda}{m}x = -\omega^2 x \Rightarrow \omega^2 = \frac{2\lambda}{m}$

$\therefore t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\lambda}} \quad , \nu = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega}} \cdot \frac{1}{2\pi}$

الحالــة الثانيــة

T sinθ, m, θ, T, Tcosθ, x, b, b, tsinθ, $\sqrt{b^2+x^2}$, x, θ, b, t sinθ

$\therefore m\ddot{x} = -2t\sin\theta$

$\therefore m\ddot{x} = -2T\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}$

$\because \sqrt{b^2+x^2} = (x^2+b^2)^{1/2} = (b[1+(\frac{x}{b})^2)^{1/2}$

$\therefore \sqrt{b^2+x^2} = [b[1+(\frac{x}{b})^2]]^{1/2} = b[1+\frac{1}{2}(\frac{x}{b})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{x}{b})^4 + \ldots\ldots]$

$\therefore (b^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = b$

$\therefore m\ddot{x} = \frac{-2t}{b}x \Rightarrow$

$\because T = \frac{\lambda}{a}(\sqrt{b^2+x^2} - a) \Rightarrow T = \frac{\lambda}{a}(b-a)$

$\therefore m\ddot{x} = \frac{-2}{b}\frac{\lambda}{a}(b-a)x$

$\therefore \ddot{x} = \frac{-2\lambda(b-a)}{abm}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$

$\rightarrow \omega^2$

$\therefore t = \frac{2\pi}{\omega}$ #

مثال :- تطير طائرة بسرعة ثابتة على إرتفاع 'h' فإذا أطلقت قذيفة مدفع على الطائرة عندما كان المستقيم الواصل من الطائرة للمدفع يصنع زاوية α مع الأفقي . أثبت أن الشرط اصابة القذيفة للطائرة هو

$$2V(U\cos\alpha - V) + \tan^2\alpha = gh$$

حيث U سرعة القذيفة

٧١ ص

سكشن 6

تمرين ①

$x = 3\cos 5t + 4\sin 5t$

$a = ?$, $T = ?$, V_{max}

$\therefore a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\ m$

$\omega = 5$. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{5}\pi$

$V_{max} = \pm \omega a = 5 \times 5 = \pm 25\ m/sec$

تمرين ②

$T = \pi\ sec$, $V_{max} = 8\ m/sec$

$\dot{x}|_{x=3} = ?$, $a = ?$

$\therefore T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$

$V_{max} = 8 = \omega a = 2a \Rightarrow a = 4$

$\dot{x} = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2} = \pm 2\sqrt{16-9} = 2\sqrt{7}\ m/sec$

تمرين ③ (مهم)

$V = \frac{100}{60} = \frac{10}{6} \Rightarrow T = \frac{6}{10} = 0.6\ sec$

$V = 15\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}a$

$\dot{x} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.6 \Rightarrow \omega = \frac{10}{3}\pi$

$\dot{x} = \frac{10}{3}\pi\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\pi = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a = \frac{9}{4}\pi\ m$

$\dot{x}_{max} = \omega a = \frac{10}{3}\pi \cdot \frac{9}{4}\pi = \frac{15}{2}\pi^2\ m/sec$

$x = a\sin(\omega t + \epsilon)$

$\dot{x} = a\omega\cos(\omega t + \epsilon)$

$\dot{x}|_{t=\frac{T}{8}} = \frac{15}{2}\pi^2\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{8\omega} + \epsilon\right) = \frac{15}{2}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \epsilon\right)$

$\dot{x}_1$ $\dot{x}_2$

x_1 x_2

تمرين 4

$\dot{x}_1 = \omega\sqrt{a^2 - x_1^2}$ ، $\dot{x}_2 = \omega\sqrt{a^2 - x_2^2}$

$\dot{x}_1^2 = \omega^2(a^2 - x_1^2)$ ، $\dot{x}_2^2 = \omega^2(a^2 - x_2^2)$

$\frac{\dot{x}_1^2}{\dot{x}_2^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{a^2 - x_2^2}$ طريقة 1

$\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = \omega^2(a^2 - x_1^2 - a^2 + x_2^2) = 0$

$\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = \omega^2(x_2^2 - x_1^2)$

$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$ # $T = \frac{2\pi}{\omega}$

تمرين 5

let $(t-1)$ ، t ، $t+1$

x_1 x_2 x_3

$\therefore x_1 = A\cos(\omega(t-1)) + B\sin(\omega(t-1))$

$x_1 = A\cos\omega t\cos\omega + A\sin\omega t\sin\omega$

$+ B\sin\omega t\cos\omega - B\cos\omega t\sin\omega$

$x_2 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$x_3 = A\cos(\omega(t+1)) + B\sin(\omega(t+1))$

$= A\cos\omega t\cos\omega - A\sin\omega t\sin\omega$

$+ B\sin\omega t\cos\omega + B\cos\omega t\sin\omega$

$x_1 + x_3 = \cos\omega[A\cos\omega t + B\sin\omega t] + \cos\omega[$

$A\cos\omega t + B\sin\omega t]$

$\therefore x_1 + x_3 = x_2 \cos w + x_2 \cos w = 2x_2 \cos w$

$\therefore x_1 + x_3 = 2x_2 \cos w$

$\cos w = \frac{x_1 + x_3}{2x_2} \Rightarrow \cos^{-1} \frac{x_1 + x_3}{2x_2} = w$

$\therefore T = \frac{2\pi}{\cos^{-1} \frac{x_1 + x_3}{2x_2}}$ #

محاضرة 8

* الحركة الدائرية :- يوجد نوعان من الحركة الدائرية
1. الحركة الدائرية الأفقية (المخروط الدائري)
2. الحركة الدائرية الرأسية

الأفقية

الرأسية

* استنتاج معادلات الحركة سواء كانت أفقية أو رأسية

نتذكر أن

$\underline{v} = \dot{r}\hat{\underline{r}} + r\dot{\theta}\hat{\underline{\theta}}$

$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\underline{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\underline{\theta}}$

هذه المعادلات تم إستنتاجها في المحاضرة 3

r = Conestant $= r_0 \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\therefore$ السرعة في الحركة الدائرية

$\underline{v} = \langle 0 , r_0\dot{\theta} \rangle$

$\therefore$ لا يوجد مركبة للسرعة في اتجاه $\hat{\underline{r}}$ وبالتالي السرعة تكون مماسية

$\underline{a} = \langle (0 - r_0\dot{\theta}^2) , (r_0\ddot{\theta} + 0) \rangle = \langle -r_0\dot{\theta}^2 , r_0\ddot{\theta} \rangle$

ملحوظة :- الموجب دائما خارج من الدائرة والعكس سالب

$\therefore$ - أي حاجة خطية = نقدر x مقدارها بالزاوي

* البندول المخروطي "الحركة الأفقية"

α, h, T, $T\cos\alpha$, $mb\omega^2$, b, F, mg

نفرض أن الدائرة مركزها p و نصف قطرها b و h هى بعد الكتلة عن المستوى التعليق 6 α هى زاوية ميل الخيط على المحور

let $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

وعند لحظة t كانت هذه هى البيانات فما هى معادلات الحركة و الزمن الدورى

من الرسم

h, α, L, b

mg, α, T, f

من تشابه مثلثات القوى والأبعاد

$\therefore \frac{h}{mg} = \frac{b}{f} = \frac{L}{T}$

$\underline{v} = \langle 0 , b\dot{\theta} \rangle = \langle 0 , b\omega \rangle$

$\underline{a} = \langle -b\dot{\theta}^2 , b\ddot{\theta} \rangle = \langle -b\omega^2 , 0 \rangle$

∵ القوى التى فى المستوى العمودى متزنة

$\therefore mg = T\cos\alpha$

∵ القوى المسببة للحركة هى القوى الأفقية

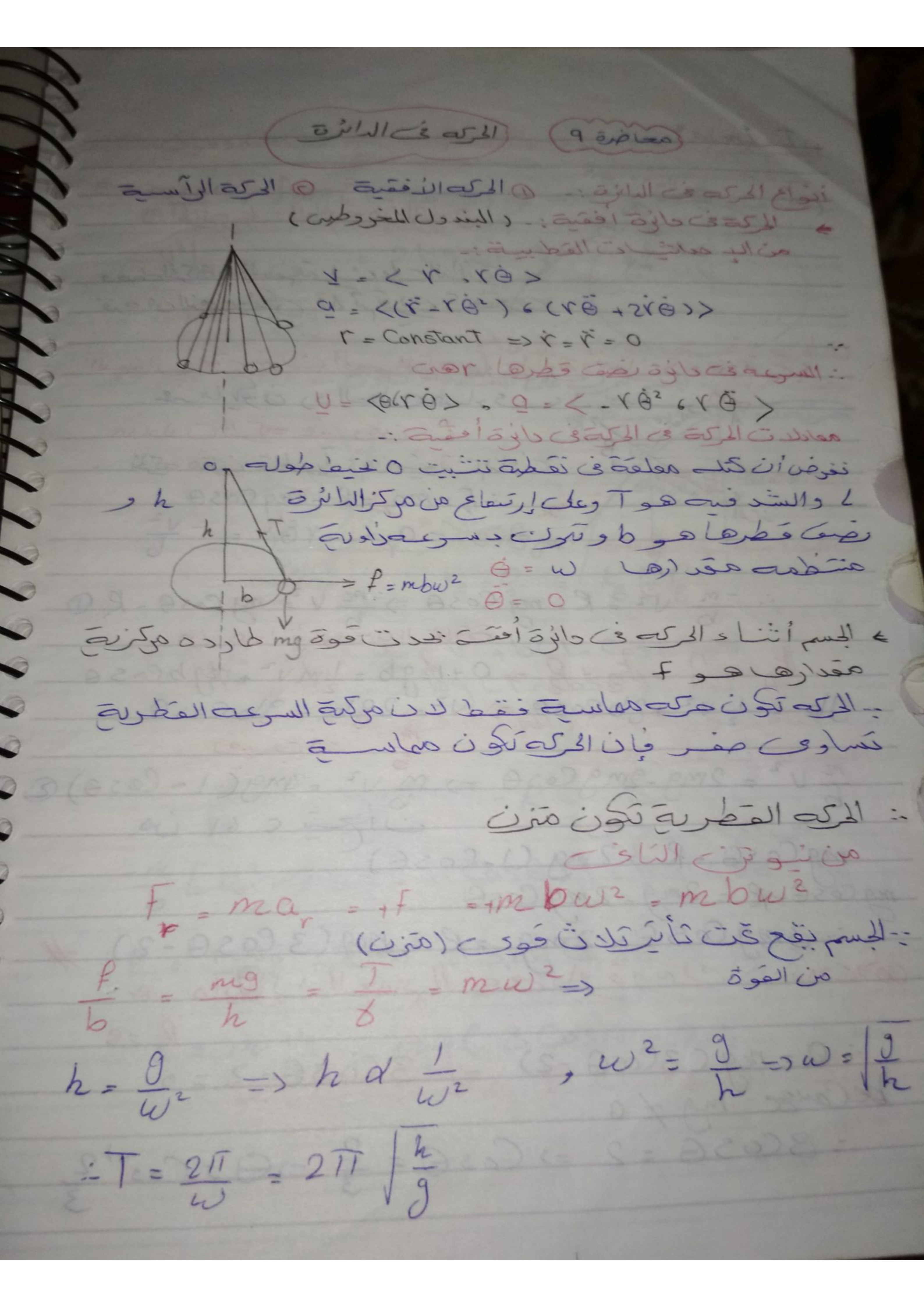
$\therefore m a_r = -f \Rightarrow f = +mb\omega^2$

$\therefore \frac{T}{L} = \frac{f}{b} = \frac{+mb\omega^2}{b} \Rightarrow T = +mL\omega^2$

$\therefore \frac{h}{mg} \left(\frac{bm\omega^2}{b}\right)^{-1} \Rightarrow h = \frac{g}{\omega^2}$

∴ بعد الكتلة عن نقطة التعليق يتناسب عكسيا مع مربع السرعة الزاوية

$\therefore \omega^2 = \frac{g}{h} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$



محاضرة ٩ — الحركه في الدائرة

أنواع الحركه في الدائرة :- ① الحركه الأفقية ② الحركه الرأسية

← الحركه في دائرة أفقية :- (البندول المخروطي)

من المركبات القطبية :-

$\underline{v} = \langle \dot{r} , r\dot{\theta} \rangle$

$\underline{a} = \langle (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) , (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \rangle$

$r = \text{Constant} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

∴ السرعه في دائرة نصف قطرها r هي

$\underline{v} = \langle 0 , r\dot{\theta} \rangle \quad , \quad \underline{a} = \langle -r\dot{\theta}^2 , r\ddot{\theta} \rangle$

معادلات الحركة في الحركة في دائرة أفقية :-

نفرض أن كتلة معلقة في نقطة تثبيت O بخيط طوله l والشد فيه هو T وعلى إرتفاع من مركز الدائرة h و نصف قطرها هو b و تتحرك بسرعه زاوية منتظمه مقدارها

$\dot{\theta} = \omega$

$\ddot{\theta} = 0$

$f = mb\omega^2$

← الجسم أثناء الحركه في دائرة أفقية تحدث قوة mg طاردة مركزية مقدارها هو f

∴ الحركه تكون حركه مماسية فقط لان مركبة السرعه القطرية تساوي صفر فإن الحركه تكون مماسية

∴ الحركه القطرية تكون متزن

من نيوتن الثاني

$F_r = ma_r = +f = +mb\omega^2 = mb\omega^2$

∴ الجسم يقع تحت تأثير ثلاث قوى (متزن)

من القوة

$\frac{f}{b} = \frac{mg}{h} = \frac{T}{l} = m\omega^2 \Rightarrow$

$h = \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow h \propto \frac{1}{\omega^2} \quad , \quad \omega^2 = \frac{g}{h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$

$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

$T = lm\omega^2$

⑤ الحركة فى دائرة رأسية :-

① الحركة على الدائرة من الخارج

$v_0 = 0$, R, θ, mg

وصف الحركة :- الجسم تتحرك على الدائرة فترة من الزمن ولتكن Δt ثم تترك كـ مقذوف

السؤال متى تترك الجسم الحركة على الدائرة وتتحرك كمقذوف ؟

عندما يكون رد الفعل مساوى لـ صفر

A, $v_0 = 0$, R, B, $b\cos\theta$, θ, $mg\cos\theta$, المركز, x, $mg\sin\theta$, mg

معادلات الحركة عند زمن t

∵ الحركة مترن قطريا ، من نيوتن الثانى

$\therefore F_r = ma_r = R - mg\cos\theta$

$\because a_r = -r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{v^2}{b}$

$$\therefore -\frac{m}{b}v^2 = R - mg\cos\theta \Rightarrow \frac{m}{b}v^2 = mg\cos\theta - R \quad ①$$

من مبدأ ثبوت الطاقة

$$k_A + P_A = k_B + P_B \Rightarrow 0 + mgb = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgb\cos\theta$$

$$gb = \tfrac{1}{2}v^2 + gb\cos\theta \Rightarrow v^2 = 2gb - gb\cos\theta$$

نضرب فى $\dfrac{m}{b}$

$$\frac{m}{b}v^2 = 2mg - 2mg\cos\theta \Rightarrow \frac{m}{b}v^2 = 2mg(1-\cos\theta) \quad ②$$

من ①، ② ينتج أن

$$mg\cos\theta - R = 2mg(1-\cos\theta)$$

$$mg\cos\theta - R = 2mg - 2mg\cos\theta$$

$$\therefore 3mg\cos\theta - 2mg = R = mg(3\cos\theta - 2) \quad \#$$

عند ما يترك الجسم الحركة فى دائرة ويتحرك كـ مقذوف يكون

$R = 0$

$$\therefore 0 = mg(3\cos\theta - 2) \Rightarrow 3\cos\theta - 2 = 0$$

because $mg \neq 0$

$$\therefore 3\cos\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3}$$

الجسم يتحرك كمقذوف عندما تكون $\theta = \cos^{-1}\frac{2}{3}$ وتكون سرعته عند تلك النقطة

$$\frac{mv^2}{b} = 2mg(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{v^2}{b} = 2g(1-\cos\theta)$$

$$\therefore v^2 = 2bg(1-\cos\theta)$$

$$\therefore v^2\Big|_{\theta=\cos^{-1}\frac{2}{3}} = 2bg\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}bg$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2}{3}bg}$$

② الحركة الرأسية ولكن من الداخل

وصف الحركة :. الجسم يتحرك على السطح الداخلي للدائرة ثم يتحرك حركة توافقية بسيطة

معادلات الحركة

من مبدأ ثبوت الطاقة :.

$$k_A + P_A = k_B + P_B$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + b(1-\cos\theta)mg$$

$$v^2 = v_0^2 - 2bg(1-\cos\theta) \quad ①$$

من نيوتن الثاني (العجلة قطرية)

الجسم متزن على القطر

$$-\frac{m}{b}v^2 = mg\cos\theta - R \quad ②$$

من (1)، ينتج أن

$$-\frac{m}{b}\left[v_0^2 - 2bg(1-\cos\theta)\right] = mg\cos\theta - R$$

$$\therefore R = \frac{mv_0^2}{b} - 2mg + 3mg\cos\theta$$

$$\therefore R = m\frac{v_0}{b} + mg(3\cos\theta - 2)$$

ملحوظة أن $R, v > 0$ دائماً أثناء الحركة

ع أقل سرعة إبتدائية تجعل هذا الجسم يلف دورة كاملة

الشرط

$U \neq 0, R = 0, \theta = \pi$

$R = 0 , \theta = \pi$

$\therefore R = \frac{m}{b} U_0^2 + mg(3\cos\theta - 2)$

$0 = \frac{m}{b} U_0^2 + mg(-3 - 2)$

$0 = \frac{m}{b} U_0^2 - 5mg$

$\therefore \frac{m}{b} U_0^2 = 5mg \Rightarrow U_0^2 = 5bg \Rightarrow U_0 = \sqrt{5bg}$

أقل سرعة إبتدائية تجعل هذا الجسم يلف دورة كاملة هي $U = \sqrt{5bg}$

أقل سرعة تجعل الجسم يصل إلى أعلى نقطة ويسقط

الشرط

$U = 0, \theta = \pi, R > 0$

$\therefore U^2 = U_0^2 - 2bg(1 - \cos\theta)$

$U^2 = U_0^2 - 2bg(1 - (-1)) = U_0^2 - 4bg$

$0 = U_0^2 - 4bg \Rightarrow U_0^2 = 4bg \Rightarrow U_0 = 2\sqrt{bg}$

مثال: جسيم ثقيل مثبت بمنتصف خيط طوله $2L$ وإحدى طرفي الخيط مثبت بنقطة O والطرف الآخر متصل بحلقة لها نفس كتلة الجسيم وتنزلق على قضيب رأسي مار بالنقطة O. أثبت أنه إذا تحرك الجسيم في مستوى أفقي بسرعة زاوية ثابتة ω حول القضيب فإن ميل أي جزء من الخيط على الرأس يساوي $\cos^{-1}\left(\frac{3g}{L\omega^2}\right)$

$T_1\cos\theta$, T_1, L, $T_1\sin\theta$, b, $T_2\sin\theta$, T_2, $mg, T_2\cos\theta$, mg, $F = ma_r$

$\because \dot\theta = \omega \Rightarrow \ddot\theta = 0$

الحركة منتظمة على القطر

$\therefore ma_r = T_1\sin\theta + T_2\sin\theta$

$mb\omega^2 = T_1\sin\theta + T_2\sin\theta$ (1)

$= \sin\theta(T_1 + T_2)$

$\Rightarrow T_1 + T_2 = \frac{mb\omega^2}{\sin\theta}$ (2)

في المستوى الرأسي الحركة منتظمة

$T_1\cos\theta = mg + T_2\cos\theta \Rightarrow mg = T_1\cos\theta - T_2\cos\theta$

$mg = (T_1 - T_2)\cos\theta$

طرح 1 من 2

$2T_2 = \frac{mb\omega^2}{\sin\theta} - \frac{mg}{\cos\theta}$

$\therefore b = L\sin\theta$

$\therefore 2T_2 = \frac{mL\omega^2\sin\theta}{\sin\theta} - \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow T_2 = \frac{m}{2}\left(L\omega^2 - \frac{g}{\cos\theta}\right)$ ③

الحلقة: عند الاتزان يكون الشد في الحلقة معاكس للاتجاه الشد الأصلي

$\Rightarrow T_2\sin\theta = R \Rightarrow T_2\cos\theta = mg$

$\therefore T_2 = \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow$ ④

بمساواة 3 ، 4

$\therefore \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{m}{2}\left(L\omega^2 - \frac{g}{\cos\theta}\right)$

$\therefore \frac{g}{\cos\theta} = \frac{L\omega^2}{2} - \frac{g}{2\cos\theta} \Rightarrow \frac{g}{\cos\theta} + \frac{g}{2\cos\theta} = \frac{L\omega^2}{2}$

$\therefore \frac{3}{2}\frac{g}{\cos\theta} = \frac{L\omega^2}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3g}{L\omega^2}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\frac{3g}{L\omega^2}$ #

مثال ٤:- ينزلق جسيم من سكون على عمق $\frac{b}{2}$ من أعلى نقطة في دائرة ملساء ثابته نصف قطرها b . اثبت أن الجسيم يترك سطح الدائرة عند ارتفاع $\frac{b}{3}$ أعلى مركز الدائرة اثبت أنه عندما يكون الجسيم على بعد $\sqrt{2}b$ من القطر الرأسي للدائرة فإنه يكون على عمق $4b$ أسفل مركز الدائرة

من مبدأ ثبوت الطاقة

$K_A + P_A = K_B + P_B$

$0 + mg\frac{b}{2} = \frac{1}{2}mv^2 + mg\,b\cos\theta$

$v^2 = bg - 2gb\cos\theta = bg(1-2\cos\theta)$

الحركة مترن على القطر

$\therefore F_r = m\frac{-v^2}{b} = R - mg\cos\theta$

$R = mg\cos\theta - \frac{v^2}{b}m \Rightarrow R = mg\cos\theta - \frac{m}{b}[gb(1-2\cos\theta)]$

$= mg\cos\theta + 2mg\cos\theta - mg = mg(3\cos\theta - 1)$

$R = 0$

عندما

الجسم يترك المسار الدائرى ويتحرك كمقذوف

$\therefore 3\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow 3\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore b\cos\theta = \frac{b}{3} \Rightarrow$ مضروب فى b الطرفين

الإرتفاع الذى يترك فيها الجسم المسار الدائرى عندما يكون على بعد من المحور الرأسى $\frac{b}{3}$ #

السرعة عندئذ

$U^2 = gb(1 - 2\cos\theta) \Rightarrow U^2 = gb(1 - \frac{2}{3})$

$\therefore U^2 = gb/3 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{gb}{3}}$ #

كمقذوف

السرعة الزمانية الجسم على الدائرة تكون بدائية

$\therefore x = b\sqrt{2} - b\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$ ($2\sqrt{2}$)

$\therefore x = b\sqrt{2} - \frac{2b\sqrt{2}}{3} = b\sqrt{2}[1 - \frac{2}{3}] = \frac{b\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \alpha = -\theta$

$\therefore y = x\tan(-\theta) - \frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{U^2\cos^2(-\theta)}$

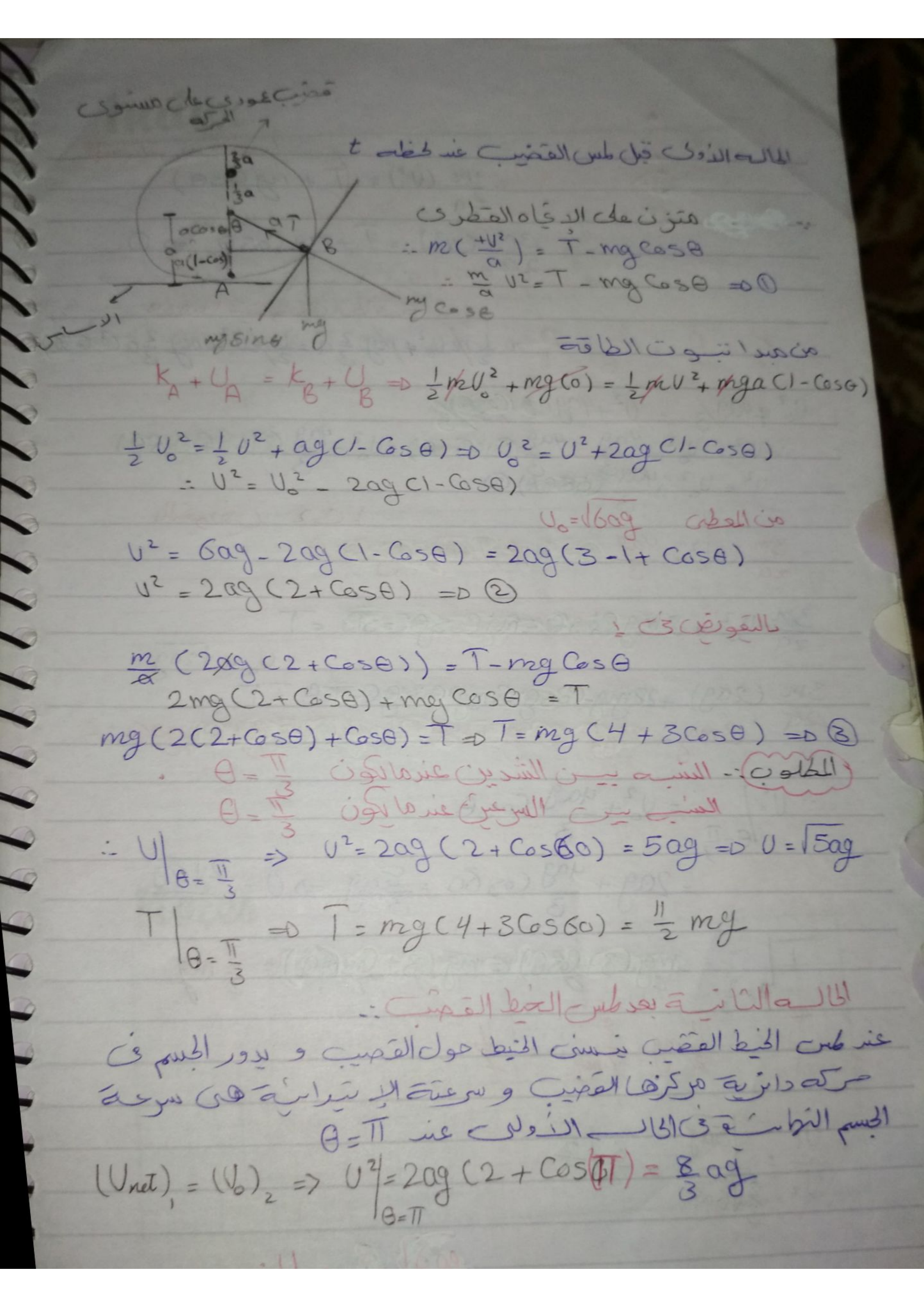
$y = -\frac{b\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{2b^2 \cdot 9 \cdot 3}{9 \cdot gb \cdot 1}$

$y = \frac{-4b}{3} - 3b = -\frac{13}{3}b$

(تحت نقطة الأصل (أسفل

$\therefore$ الإرتفاع العمودى $\therefore$ الإرتفاع $= \frac{-13}{3}b - \frac{b}{3} = -4b$ #

مثال: تتدلى كتلة m من أحد طرفى خيط غير مرن طوله a ويتصل طرفه الآخر بنقطة ثابتة O. فإذا ثبت قضيب فى وضع أفقى عموديا على مستوى الحركة للكتلة m عند نقطة تقع رأسيا أعلى O وتبعد عنها مسافة $\frac{1}{3}a$ وقذفت الكتلة بسرعة ابتدائية $\sqrt{6ag}$ أوجد النسبة بين الشدين فى الخيط عندما يلمس الخيط القضيب لأول مرة وعندما يصنع كل منها زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع الرأسى. أوجد أيضا النسبة بين سرعتى الكتلة عند هذين الوضعين.



الحالة الأولى قبل لمس القضيب عند لحظة t

متزن على الاتجاه القطرى

$\therefore m\left(\frac{+v^2}{a}\right) = T - mg\cos\theta$

$\therefore \frac{m}{a} v^2 = T - mg\cos\theta \Rightarrow ①$

من مبدأ ثبوت الطاقة

$K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + mg(0) = \frac{1}{2} m v^2 + mga(1-\cos\theta)$

$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} v^2 + ag(1-\cos\theta) \Rightarrow v_0^2 = v^2 + 2ag(1-\cos\theta)$

$\therefore v^2 = v_0^2 - 2ag(1-\cos\theta)$

من المعطى $v_0 = \sqrt{6ag}$

$v^2 = 6ag - 2ag(1-\cos\theta) = 2ag(3-1+\cos\theta)$

$v^2 = 2ag(2+\cos\theta) \Rightarrow ②$

بالتعويض في ①

$\frac{m}{a}(2ag(2+\cos\theta)) = T - mg\cos\theta$

$2mg(2+\cos\theta) + mg\cos\theta = T$

$mg(2(2+\cos\theta)+\cos\theta) = T \Rightarrow T = mg(4+3\cos\theta) \Rightarrow ③$

المطلوب :- النسبة بين الشدين عندما يكون $\theta = \frac{\pi}{3}$.

النسبة بين السرعة عندما يكون $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore v\big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} \Rightarrow v^2 = 2ag(2+\cos 60) = 5ag \Rightarrow v = \sqrt{5ag}$

$T\big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} \Rightarrow T = mg(4+3\cos 60) = \frac{11}{2} mg$

الحالة الثانية بعد لمس الخيط القضيب :-

عند لمس الخيط القضيب ينثنى الخيط حول القضيب و يدور الجسم في حركة دائرية مركزها القضيب و سرعته الابتدائية هى سرعة الجسم النهائية في الحالة الأولى عند $\theta = \pi$

$(v_{net})_1 = (v_0)_2 \Rightarrow v^2\big|_{\theta=\pi} = 2ag(2+\cos\pi) = \frac{8}{3} ag$

الجسم متزن قطريا

$$\therefore \frac{+m}{\frac{2}{3}a}(U^2) = +(T + mg\cos\theta)$$

$$\frac{3m}{2a}(U^2) = T + mg\cos\theta \Rightarrow ①$$

من مبدأ ثبوت الطاقة

$$K_A + P_A = K_B + P_B \Rightarrow \frac{1}{2}mU_0^2 + mg\frac{2}{3}a = \frac{1}{2}mU^2 + mg\frac{2}{3}a\cos\theta$$

$$U_0^2 + 4ag/3 = U^2 + 4ag\cos\theta/3$$

$$\therefore U^2 = U_0^2 + \frac{4ag}{3} - \frac{4ag}{3}\cos\theta = U_0^2 + \frac{4ag}{3}(1-\cos\theta)$$

$$U^2 = U_0^2 + \frac{4ag}{3}(1-\cos\theta) \quad ②$$

بالتعويض عن 2 في 1

$$\frac{3m}{2a}\left(U_0^2 + \frac{4ag}{3}(1-\cos\theta)\right) = T + mg\cos\theta$$

$$\frac{3m}{2a}U_0^2 + 2mg(1-\cos\theta) - mg\cos\theta = T$$

$$U_0 = \sqrt{2ag}$$

$$\frac{3m}{2a}(2ag) + 2mg - 2mg\cos\theta - mg\cos\theta = T$$

$$3mg + 2mg - 3mg\cos\theta = T \Rightarrow T = 5mg - 3mg\cos\theta$$

$$\therefore U^2\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = U_0^2 + \frac{4ag}{3}\cos\theta$$

$$= 2ag + \frac{4ag}{3}\cos 60 = \frac{8}{3}ag \Rightarrow U = \frac{2\sqrt{6ag}}{3}$$

$$T\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 5mg - 3mg\cos\theta = 5mg - 3mg\cos 60 = \frac{7}{2}mg$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{11}{2}mg \cdot \frac{2}{7mg} = \frac{11}{7}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\sqrt{5ag}}{\frac{2}{3}\sqrt{6ag}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

Index

$mg\cos\theta$

T

θ

θ

$\frac{2}{3}a\cos\theta$

$\frac{2}{3}a$

الرأسي

mg

$\frac{1}{3}a$

$mg\sin\theta$

Notes

محاضرة رقم ١٠

مثال ٤ ص ٨٧ تم حله في المحاضرة رقم ٩

* حركة توافقية بسيطة (مش في الكتاب)

الحالة الأولى: (زنبرك أفقي):

وصف الحركة

الطول الطبيعي b_0

السعة a

عند لحظة زمنية t كانت الحركة كما بالشكل

الطول الطبيعي b_0

سعة الاهتزازة a

الزيادة في الخيط x

موضع الاتزان o

معادلات الحركة

من نيوتن الثاني

$$m\ddot{x} = -T \Rightarrow ①$$

من قانون الهوك

$$T \propto \frac{\text{الطول بعد الشد} - \text{الطول الطبيعي}}{\text{الطول الطبيعي}}$$

$$\therefore T \propto \frac{(b_0+x) - b_0}{b_0} \Rightarrow T \propto \frac{x}{b_0} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{b_0} x \quad ②$$

حيث λ هو ثابت التناسب ويعرف بـ معامل المرونة

والمقدار $\frac{\lambda}{b_0}$ يعرف بـ ثابت الزنبرك (ثابت هوك) وبالتالي يكون القانون عبارة عن (يتناسب الشد مع الزيادة في الخيط ويكون الثابت $\frac{\lambda}{b_0}$)

من 1، 2 ينتج أن

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0}x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{mb_0}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}$$

∴ الحركة حركة توافقية بسيطة وزمنها الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$$

* الحالة الثانية (خيط مرن):

* وصف الحركة

الجسم يتحرك حركة توافقية من $A \to A'$ ثم حركة منتظمة من $k \to A$ نتيجة مرونة الخيط

طرفي S.H.M . A, A' مركز الحركة o الطول الطبيعي b_0

السعة a

عند لحظة t

$\longleftarrow T$ $\longrightarrow \ddot{x}$

A' P x O A ... k ... A O P A'

من نيوتن الثاني

$m\ddot{x} = -T$

من قانون هوك

$T = \frac{\lambda}{b_0} x$

$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{mb_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$

$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}$

ح ب

لمعرفة الزمن الدوري

$T = 2\left[t_{A' \to a} + t_{a \to o'} + t_{o \to A'}\right]$

$t_{A' \to o} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} \Rightarrow t_{A' \to o} = t_{o \to A'} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$

$\because$ الحركة منتظمة من o إلى o'

$t_{o \to o'} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$, المسافة $= 2b_0$, السرعة $= v|_A$

$\because$ السرعة عند A تكون v_{max}

$\therefore v_{max} = \omega a = a\sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}$

$\therefore t_{o \to o'} = \frac{2b_0}{a\sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}} = \frac{2b_0}{a}\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$

$\therefore T = 2\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} + \frac{2b_0}{a}\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}\right]$

$= 2\sqrt{\frac{b_0 m}{\lambda}}\left[\pi + \frac{2b_0}{a}\right]$ //

ملحوظة

في الحركة التوافقية البسيطة الأفقية

لا نظير الإستطالة الإستاتيكية

الحالة الثالثة :- (زنبرك رأسي)

* وصف الحركة :- عملت قوة الوزن على إستطالة الزنبرك مسافة a ثم اتزن اتزان إستاتيكي ثم عند تحريكه حركة دينامكية تحت تأثير وزنه تحرك حركة توافقية بسيطة مركزها O وطرفي الحركة A, A'

b_0, A, O, A', a

عند لحظة t كان الجسم على مسافة $(x+a)$ من b_0 بحيث يكون مقدار الزيادة في الخيط أقل من $2a$

في الحالة الإستاتيكية

من نيوتن الثاني $mg = T_0$

من قانون هوك $T_0 = \frac{\lambda}{b_0} a$

$\therefore mg = \frac{\lambda}{b_0} a \Rightarrow a = \frac{mgb_0}{\lambda}$ (1)

في الحالة الديناميكية

من نيوتن الثاني $m\ddot{x} = -T + mg$

من قانون هوك $T = \frac{\lambda}{b_0}(x+a)$

$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0}(x+a) + mg \Rightarrow$ (2)

من 1 ، 2 ينتج أن

$$m\ddot{x} = \frac{-\lambda}{b_0}\left(x + \frac{mgb_0}{\lambda}\right) + mg \Rightarrow m\ddot{x} = \frac{-\lambda}{b_0}x + mg - mg$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0}x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{b_0 m}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{b_0 m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$$

الحالة الرابعة :- (خيط مرن رأسيا) :

(٢) ترك ليسقط : يسقط تحت تأثير وزنه فيحدث إستطالة مقدارها a ثم يسكن سكون لحظة (إستاتيكي) ثم تحرك حركة توافقية بسيطة بحيث يكون طرفي الحركة A, A' ومركزها O

b_0, A, a, O, a, A'

عند لحظة t حيث يكون الزيادة في الخيط هي $x+a$ حيث

$x+a < 2a$ ، $b_0 > a$

* الحالة الإستاتيكية

$mg = T_0$, $T_0 = \frac{\lambda}{b_0} a$

$\therefore mg = \frac{\lambda}{b_0} a \Rightarrow a = \frac{mgb_0}{\lambda} \Rightarrow ①$

* في الحالة الديناميكية

$m\ddot{x} = -T + mg$, $T = \frac{\lambda}{b_0}(x+a)$

$\therefore m\ddot{x} = \frac{-\lambda}{b_0}(x+a) + mg \Rightarrow m\ddot{x} = \frac{-\lambda}{b_0}\left(x + \frac{mgb_0}{\lambda}\right) + mg$

$\therefore m\ddot{x} = \frac{-\lambda}{b_0} x - mg + mg \Rightarrow m\ddot{x} = \frac{-\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{mb_0} x$

$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}}$

الحالة الخامسة :- (خيط مرن أو زنبرك) ثم شده مسافة h من نهاية الطول الطبيعي ثم ترك ليتحرك حيث يكون $h < 2a$

* وصف الحركة :- الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة مركزها هو o وطرفي الحركة AA' وسعتها a

* عند لحظة t كان الزيادة في الخيط $h = (x+a)$ حيث $h < 2a$

* في حالة الإستاتيكية

$mg = T_0$, $T_0 = \frac{\lambda}{b_0} a$

$mg = \frac{\lambda}{b_0} a \Rightarrow a = \frac{mgb_0}{\lambda} \Rightarrow ①$

* في الحالة الديناميكية

$m\ddot{x} = mg - T \Rightarrow T = \frac{\lambda}{b_0}(x+a) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{b_0}(x+a)$

$\therefore m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{b_0}\left(x + \frac{mgb_0}{\lambda}\right) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{b_0} x$

$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{b_0} x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{mb_0} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$

$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mb_0}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{mb_0}{\lambda}}$ #

* الحالة السادسة: خيط مرن تم شده مسافة $h(x+a)$ حيث h هو مقدار الزيادة في الخيط حيث $h > 2a$

* وصف الحركة ومعادلتها المحاضرة القادمة

محاضرة 11

مسائل على المحاضرة الماضية

مثال 1: زنبرك خفيف طوله الطبيعي L ومعامل مرونته λ ثبت أحد طرفيه في نقطة مع منضدة أفقية ملساء وفي الطرف الآخر كتلة مقدارها m فإذا أزيحت الكتلة مسافة x ثم تركت أثبت أن الكتلة تتحرك حركة توافقية بسيطة وأوجد زمنها الدوري.

(شكل: A ، a ، L ، o ، x ، A' ، B)

حيث الشكل يمثل زنبرك

من نيوتن الثاني

$$m\ddot{x} = -T$$

من الهوك

$$T = \frac{\lambda}{L}x$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{L}x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{mL}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}} \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

مثال 2: خيط مرن طوله الطبيعي L ومعامل مرونته λ مثبت في نقطة على منضدة أفقية ملساء وفي الطرف الآخر نقطة مادة كتلتها m أزيحت النقطة المادية مسافة ثم تركت لتتحرك أوجد الزمن الدوري

(شكل: A ، a ، x ، o ، a ، B ، k ، B' ، a ، o' ، x ، A')

من نيوتن الثاني

$$m\ddot{x} = -T$$

من الهوك

$$T = \frac{\lambda}{L}x$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{L}x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mL}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \, , \, \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$$

لمعرفة الزمن جزأ الحركة لأنه عندما يصل طول الخيط إلى الطول الطبيعي ينعدم الشد وتتحرك حركة منتظمة بسرعة U_{max}

$$T = 2\left[T_{o' \to A} + T_{o' \to o} + T_{o \to A}\right]$$

$$T_{o' \to A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}\pi/\sqrt{\frac{\lambda}{mL}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

$$T_{o \to A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

$T_{o \to o'} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{2l}{U_{max}}$, $U_{max} = \omega a$

$\therefore U_{max} = a\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}$ من قوانين الحركة التوافقية البسيطة

$\therefore T_{o \to o'} = \frac{2l}{a}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$

$\therefore T = 2\left[\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}} + \frac{2l}{a}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}} + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}\right]$

$\therefore T = 2\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}\left[\pi + \frac{2l}{a}\right]$

٣) خيط مرن خفيف طوله الطبيعي l ومعامل مرونته λ علق رأسياً من أحد طرفيه وبالطرف الآخر جسيم كتلته m وترك ليسقط من نهاية طوله الطبيعي أثبت أنه يتحرك حركة توافقية بسيطة وأوجد زمنها الدوري

(l, A, a, O, x, A')

عندما علقت الكتلة x رأسياً أنشأت شد إستاتيكي

$mg = T_o$, $T_o = \frac{\lambda}{l}a$

$\therefore mg = \frac{\lambda}{l}a \Rightarrow a = \frac{mgl}{\lambda}$

وعندما تركت ليسقط من نهاية الطول الطبيعي أنشأت شد ديناميكي

$m\ddot{x} = mg - T$, $T = \frac{\lambda}{l}(a+x)$

$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{l}(a+x)$, $m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{l}\left(\frac{mgl}{\lambda} + x\right)$

$m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{l}x \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{l}x$

$\therefore \ddot{x} = -\frac{\lambda}{ml}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$, $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{ml}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$

ملحوظة: في الزنبرك الحركة تكون توافقية بسيطة دائماً.

٤٣) خيط مرن خفيف طوله الطبيعي l ومعامل مرونته λ علق رأسياً من طرفه العلوي وثبت بطرفه السفلي جسيم كتلته m وابتداء الحركة من السكون من موضع يبعد h أسفل نهاية الطول الطبيعي أثبت أن الحركة توافقية بسيطة وأوجد زمنها الدوري.

في حالة $h<2a$

الكتلة المعلقة رأسيا تسبب شد إستاتيكي

$$mg = T_0 \quad , \quad T_0 = \frac{\lambda}{L}a$$

$$\therefore mg = \frac{\lambda}{L}a \Rightarrow a = mgL/\lambda$$

وعند شد الكتلة مسافة $h<2a$ يتولد شد ديناميكي

$$m\ddot{x} = mg - T \quad , \quad T = \frac{\lambda}{L}(a+x)$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L}(a+x) \quad , \quad m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L}\left(\frac{mgL}{\lambda} + x\right)$$

$$m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{L}x \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{L}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mL}x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$$

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{\lambda}}$$

في حالة $h>2a$ تكون سعة الحركة هي $d = h - a$

وفي أي لحظة t كانت المسافة هي x ، $d = h - a$

في حالة الشد الإستاتيكي

$$mg = T_0 \quad , \quad T_0 = \frac{\lambda}{L}a$$

$$mg = \frac{\lambda}{L}a \Rightarrow a = \frac{mgL}{\lambda}$$

في حالة الشد الديناميكي

$$m\ddot{x} = mg - T \quad , \quad T = \frac{\lambda}{L}(a+x)$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L}(a+x) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{L}\left(\frac{mgL}{\lambda} + x\right)$$

$$m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{L}x \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{L}x \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{mL}x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\omega^2 x \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}} \quad ,$$

∴ الحركة توافقية بسيطة سعتها $h - a$ و $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{mL}}$

لمعرفة الزمن نجزأ الحركة لأن الجسم عندما يكون طول الخيط مساوي لطوله الطبيعي ينعدم الشد ويتحرك كمقذوف رأسي

$$T = 2\left[T_{A' \to A} + T_{\text{مقذوف}}\right]$$

$$T_{A' \to A}$$

لا يمكن معرفة زمن الحركة التوافقية إلا عن طريق العلاقة بين x ، t

لأن السعة ليست a ولكن السعة $d = h - a$

$$\therefore x = d\sin(\omega t + \varepsilon)$$

عندما $t = 0$ كانت $x = d$

$$d = d\sin(\varepsilon) \Rightarrow 1 = \sin\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore x = d \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$x = d \cos(\omega t)$

وعندما كانت $t = t'$ (زمن الحركة التوافقية) كانت $x = -a$

$-a = d \cos(\omega t')$

$\frac{-a}{d} = \cos(\omega t') \Rightarrow \omega t' = \cos^{-1} \frac{-a}{d}$

$\omega t' = \pi - \cos^{-1} \frac{a}{d}$ Cos

$\therefore t' = \omega [\pi - \cos^{-1} \frac{a}{d}]$

$T_{\text{مقذوف}} = \frac{v \sin\alpha}{g} = \frac{v}{g}$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$v = \omega \sqrt{d^2 - a^2}$ من قوانين الحركة التوافقية البسيطة $(v = \omega \sqrt{a^2 - x^2})$ (السعة، البعد)

$\therefore$

$T_{\text{مقذوف}} = \frac{\omega}{g} \sqrt{d^2 - a^2}$

$\therefore T = 2 [\omega(\pi - \cos^{-1} \frac{a}{d}) + \omega \sqrt{d^2 - a^2}]$

$= 2\omega [(\pi - \cos^{-1} \frac{a}{d}) + \sqrt{d^2 - a^2}]$ #

مثال 5 جسيم كتلته m معلق بطرف خيط مرن طرفه الآخر مثبت ومعامل مرونته يساوي وزن الجسم. إذا سحب الخيط رأسياً لأسفل بحيث كان طوله يساوي أربعة أمثال طوله الطبيعي ثم ترك. اثبت أن الجسيم سوف يعود لهذه النقطة لأول مرة بعد زمن قدره $\sqrt{\frac{a}{g}} (2\sqrt{3} + 4\frac{\pi}{3})$ حيث a الطول الطبيعي للخيط.

a, A, b = a, C, 2a, x, 2a, 2a, B

في حالة الشد الاستاتيكي

$mg = T_0 \Rightarrow T_0 = \frac{\lambda}{a} b$

$mg = \frac{\lambda}{a} b \Rightarrow b = \frac{mga}{\lambda}$, $\lambda = mg$

$\therefore b = a$

في حالة الشد الديناميكي عند أي لحظة t

$m\ddot{x} = mg - T$, $T = \frac{\lambda}{a}(x + a) = \frac{\lambda}{a}(x + a)$

$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a}(x + a) \Rightarrow m\ddot{x} = mg - mg - \frac{\lambda}{a} x$

$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{a} x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{ma} x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$

$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{ma}} = \sqrt{\frac{mg}{ma}} = \sqrt{\frac{g}{a}}$

الجسم يتحرك من B : A حركة توافقية بسيطة ثم تحرك حركة مقذوف رأسي ولذلك عند معرفة الزمن لجزأ الحركة

$$T = 2\left[t_{B \to A} + t_{\text{مقذوف}}\right]$$

لمعرفة $t_{B \to A}$ لا يمكن معرفتها إلا عن طريق علاقة بين x, t
لأن الحركة سعتها هي $2a$ وليس a

$$\therefore x = 2a \sin(\omega t + \varepsilon)$$

عند $t = 0$ كانت $x = 2a$

$$\therefore 2a = 2a \sin(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = 2a \cos \omega t$$

عند $t = t_{B \to A}$ يكون $x = -a$

$$\therefore -a = 2a \cdot \cos \omega t_{B \to A} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \cos \omega t_{B \to A}$$

$$\therefore \omega t_{B \to A} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_{B \to A} = \omega^{-1} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

لمعرفة $t_{\text{مقذوف}}$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0}{g} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$v_0 = \omega \sqrt{4a^2 - a^2} = \omega a \sqrt{3} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot a\sqrt{3} = \sqrt{3ag}$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{3ag}}{g} = \sqrt{\frac{3a}{g}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{3}$$

$$\therefore T = 2\left[\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}} + \sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{3}\right] = \sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right] \#$$

التصادم

الدفع :- قوى عظمى في فترة زمنية قصيرة أو التغير في كمية الحركة

$$I = \int_0^{\Delta t} \underline{F} \cdot dt \quad , \quad \underline{F} = m\underline{a} = m \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\therefore I = \int_0^{\Delta t} m \cdot \left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right) dt = m \int_{v_0}^{v_1} d\underline{v}$$

$$I = m[v]_{v_0}^{v_1} = m v_1 - m v_0$$

الدفع اللحظي :-

$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} f \cdot dt$$

* قانون نيوتن التجريبي :-

$$-e = \frac{\text{السرعة النسبية بعد التصادم}}{\text{السرعة النسبية قبل التصادم}}$$

حيث e معامل الارتداد $0 < e < 1$

سؤال :- لماذا لم يقع الغلاف الجوي :- أولا الغلاف الجوي عبارة عن غازات تتحرك حركة عشوائية فتتصادم ببعضها البعض وبالتالي تفقد طاقة ثم تسقط وهذا لم يحدث لأن معامل المرونة لها مساوي للواحد

سكشن 7

الحركة الدائرية

الحركة الدائرية — سكشن 8

بدء نقطة مادية الحركة من السكون من أعلى نقطة على سطح كرة ملساء نصف قطرها a أوجد الموضع الذى تترك النقطة المادية سطح الدائرة وإذا تحركت النقطة المادية كمقذوف أثبت أنه عندما تكون النقطة على مسافة $\sqrt{5}\,a$ من القطر الرئيسى يكون عمقها أسفل أسفل نقطة من الدائرة مسافة $\frac{15}{4}a$

من نيوتن الثانى

$$\frac{mV^2}{a} = mg\cos\theta - R \quad (1)$$

من مبدأ ثبوت الطاقة

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$0 + mga = \frac{1}{2}mV^2 + mga\cos\theta$$

$$2mga - 2mga\cos\theta = mV^2 \Rightarrow mV^2 = 2mga(1-\cos\theta) \quad (2)$$

بالتعويض من 2 فى 1

$$2mg - 2mg\cos\theta = mg\cos\theta - R$$

$$R = mg\cos\theta + 2mg\cos\theta - 2mg = 3mg\cos\theta - 2mg$$

$$R = mg(3\cos\theta - 2)$$

الجسم يترك الحركة الدائرية ويتحرك كمقذوف عندما $R=0$

$$\therefore R=0 \Rightarrow 3\cos\theta - 2 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \quad 3$$

بالتعويض فى 2 من 3

$$\therefore V^2 = 2ag(1-\cos\theta) \Rightarrow V^2\Big|_{\cos=\frac{2}{3}} = 2ag\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}ag$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{2}{3}ag}$$

∴ الجسم يترك كمقذوف بسرعة إبتدائية مقدارها $\sqrt{\frac{2}{3}ag}$ وبزاوية مقدارها $-\theta$ أو $(2\pi - \theta)$

$$x = \sqrt{5}\,a - a\sin\theta$$

$$x = \sqrt{5}\,a - a\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$$

$$y = x\tan(\theta) + \frac{1}{2} g \frac{x^2}{U^2 \cos^2(\theta)}$$

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{3} a \cdot \frac{-\sqrt{5}}{x} + \frac{1}{2} g \cdot \frac{4 \cdot 5 a^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{9 \cdot 2 a g \cdot 2 \cdot 2}$$

$$y = \frac{-5}{3} a + \frac{15}{4} a = \frac{25}{12} a$$

الجسم يبعد مسافة $\frac{25}{12} a$ من نقطة القذف ويبعد مسافة عن أسفل نقطة في الدائرة

$$\frac{25}{12} a - (-a - a\cos\theta) = \frac{25}{12} a + \frac{5}{3} a = \frac{15}{4} a$$

مثال :- نقطة مادية كتلة m معلقة من نقطة ثابتة بواسطة خيط خفيف غير مرن طوله L بدء النقطة المادية الحركة بسرعة إبتدائية أفقية مقدارها $\sqrt{3gL}$ أوجد الموضع الذي ينثني عنده الخيط وأثبت أن أقصى ارتفاع تصل إليه النقطة المادية فوق هذا الموضع بعد حركتها كمقذوف هو $\frac{4}{27} L$ وأن أقصى ارتفاع لنقطة المتحركة فوق أسفل نقطة هو $\frac{40 L}{27}$

من نيوتن الثاني

$$\frac{mV^2}{L} = T - mg\cos\theta \quad (1)$$

من مبدأ ثبوت الطاقة

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$0 + \frac{1}{2} m (3gL) = \frac{1}{2} m V^2 + mg L (1 - \cos\alpha)$$

$$3mgL = mV^2 + 2mgL(1 - \cos\alpha)$$

$$mV^2 = 3mgL - 2mgL(1 - \cos\alpha) = mgL(3 - 2 + 2\cos\alpha)$$

$$mV^2 = mgL(1 + 2\cos\alpha) \quad (2)$$

بالتعويض ب 2 في 1

$$mg(1 + 2\cos\alpha) = T - mg\cos\alpha$$

$$T = mg(1 + 3\cos\alpha)$$

عند ما يرتخي الخيط يكون $T = 0$

$$\therefore 1 + 3\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{3}$$

$$v^2 = gL(1 + 2\cos\alpha) = \frac{1}{3}gL \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{3}gL}$$

الجسم يتحرك كمقذوف بسرعة $\sqrt{\frac{1}{3}gL}$ بزاوية $\theta = \cos^{-1}\frac{-1}{3}$

$$\therefore y_{max} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{\frac{1}{3}gL \cdot \frac{8}{9}}{2g} = \frac{4}{27}L$$

$$\therefore y_{total} = \frac{4}{27}L + L(1 - \cos\alpha) = \frac{4}{27}L + L(1 + \frac{1}{3})$$

$$= \frac{40}{27}L$$

مثال ٣: كتلة m تتصل بخطين متساويين فى الطول والطرفين الآخرين مثبتين على محور رأسى واحد بحيث تدور الكتلة فى دائرة أفقية حول المحور الرأسى واحد فإذا كانت طول الجزء الرأسى بين طرفين الخيط هو d فبين أن أقل سرعة زاوية لدوران الكتلة هى $\sqrt{2g/d}$ وإذا كانت سرعة الدوران هى ضعف هذه السرعة فأثبت أن النسبة بين الشدين هى $\frac{5}{3}$

من نيوتن الثانى

$$mr\omega^2 = (T_1 + T_2)\sin\theta$$

$$\therefore r = \frac{d}{2}\tan\theta$$

$$\therefore \frac{md}{2}\omega^2\tan\theta = (T_1 + T_2)\sin\theta$$

$$\frac{md\omega^2}{2} = (T_1 + T_2)\cos\theta \Rightarrow (1)$$

$$\therefore T_1\cos\theta = T_2\cos\theta + mg \Rightarrow mg = (T_1 - T_2)\cos\theta \Rightarrow (2)$$

بقسمة 1 ÷ 2

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2} = \frac{d\omega^2}{2g} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2g(T_1 + T_2)}{d(T_1 - T_2)}$$

أقل سرعة زاوية عند ما يكون $T_2 = 0$ (لحدوث ارتخاء فى الخيط)؟

$$\therefore \omega^2 = \frac{2gT_1}{dT_1} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{d}}$$

من قانون النسبة

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega^2 d + 2g}{\omega^2 d - 2g} = \frac{8g + 2g}{8g - 2g} = \frac{5}{3} \quad \#$$

Cheet جسيم ثقيل B متصل بنقطتين a، b على نفس الخيط الأفقى بخيطين غير متساويين فى الطول وغير مرنيين قذف الجسيم بسرعة تكاد تكفى بأن يرسم دائرة رأسيه وعندما كانت B أسفل موضع لها وانقطع الخيط Bb ثم تحركت B فى دائرة أفقية أثبت أن الزاوية aBb هى $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ أو $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ أثبت أنه إذا كان الشد فى الخيط Ba لم يتغير ما انقطع الخيط aBb تكون قائمة.

الدفع والتصادم

الدفع :- قوة عظمى فى فترة زمنية قصيرة $I = \int_0^{\Delta t} f \cdot dt$

$$I = \int_0^{\Delta t} f \cdot dt = m \int_0^{\Delta t} \underline{a} \cdot dt = m \int_0^{\Delta t} \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot dt$$

$$\therefore I = m \int_{v_1}^{v_2} dv = mv_2 - mv_1 = \Delta p$$

∴ الدفع :- التغير فى كمية الحركة فى فترة صغيرة جداً

الدفع اللحظى :-

$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} \underline{f} \cdot dt$$

التصادم :- لكى يتم حل مسائل التصادم لا بد من علاقتين

(1) كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

(2) $\frac{\text{السرعة النسبية بعد التصادم}}{\text{السرعة النسبية قبل التصادم}} = -e$

حيث e يعرف بمعامل الارتداد وهو $0 < e < 1$ و e يساوى واحد فقط فى الغازات

⇐ إذا كانت التصادم فى كرتين فإن التصادم يكون فى اتجاه خط المركزين ولا يكون فى اتجاه المماس

(خط المماس) t ، n (خط المركزين)

m ، M

$$\therefore mV_n + MU_n = mV_n' + MU_n' \quad (1)$$

حيث U' ، V' هى السرعات بعد التصادم

$$\therefore \frac{\underline{w}_n'}{\underline{w}_n} = -e \Rightarrow \frac{V_n' - U_n'}{V_n - U_n} = -e \quad (2)$$

حيث V', U' هى السرعات بعد التصادم

وقبل التصادم معلومة وبالتالى المجهول فى المعادلتين U', V'

مثال: كتلتان M ، m متصلتان بخيط خفيف غير مرن يمر حول بكرة ملساء مهملة الوزن مثبتة في مستوى رأسي أعلى مستوى أفقي أملس ، والكتلة الكبرى M ممسوك بها والمجموعة ساكنة. إذا تركت الكتلة M للحركة وإذا علم أنها تصل المستوى الأفقي بعد زمن t أثبت أن المجموعة تصبح في حالة سكون لحظي والخيط مشدود بعد زمن $3Mt/(m+M)$ وأوجد الزمن الذي ينقضي قبل سكون المجموعة تماما.

∴ من الرسم أن الزمن المطلوب هو

$$T = t + \tau + t_1$$

في المرحلة الأولى:

$$Ma = Mg - T \Rightarrow \quad , \quad ma = T - mg$$

بالجمع

$$a(M+m) = g(M-m) \Rightarrow a = \frac{M-m}{M+m} g$$

العجلة ثابتة أي منتظمة

∴ السرعة قبل الاصطدام مباشرة

$$v = v_0 + at \Rightarrow v = \frac{M-m}{M+m} g t \Rightarrow (1)$$

عند الاصطدام بالمستوى يرتخي الخيط وتتحرك m كمقذوف رأسي بسرعة v وزاوية $\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \tau = \frac{2v \sin\alpha}{g} = \frac{2v_1}{g} = \frac{2(M-m)}{M+m} t \Rightarrow 2$$

بعد تحرك الكتلة m كمقذوف وتحرك لزمن مقدارة زمن الطيران τ يتولد شد في الحبل وبالتالي يتولد شد دفعي يعمل على تحريك المجموعة في اتجاه m بعجلة تقصيرية مقدارها a- حتى تسكن لحظي والحبل مشدود

$\therefore m a_2 = mg - T \quad , \quad M a_2 = T - Mg$

بالجمع

$\therefore a_2 (M+m) = (m-M) g \Rightarrow a_2 = \frac{-(M-m)}{M+m} g = -a$

$\therefore$ كمية الحركة بعد الدفع = كمية الحركة قبل الدفع

$\therefore M V + m U = M V' + m U'$

$V = U \quad , \quad V' = U'$ حيث المجموعة تتحرك كجسم واحد بان

$\therefore M(0) + m V = (M+m) V'$

$\therefore V' = \frac{m V}{M+m} \Rightarrow V' = \frac{m}{M+m} \times \frac{M-m}{M+m} g t$

$\therefore V' = \frac{m(M-m)}{(M+m)^2} g t$

المجموعة تتحرك بسرعة ابتدائية مقدارها V' حتى تسكن

$\therefore V = V_0 + a_2 t_1 \Rightarrow -V_0 = -a t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{V_0}{a} = \frac{V'}{a}$

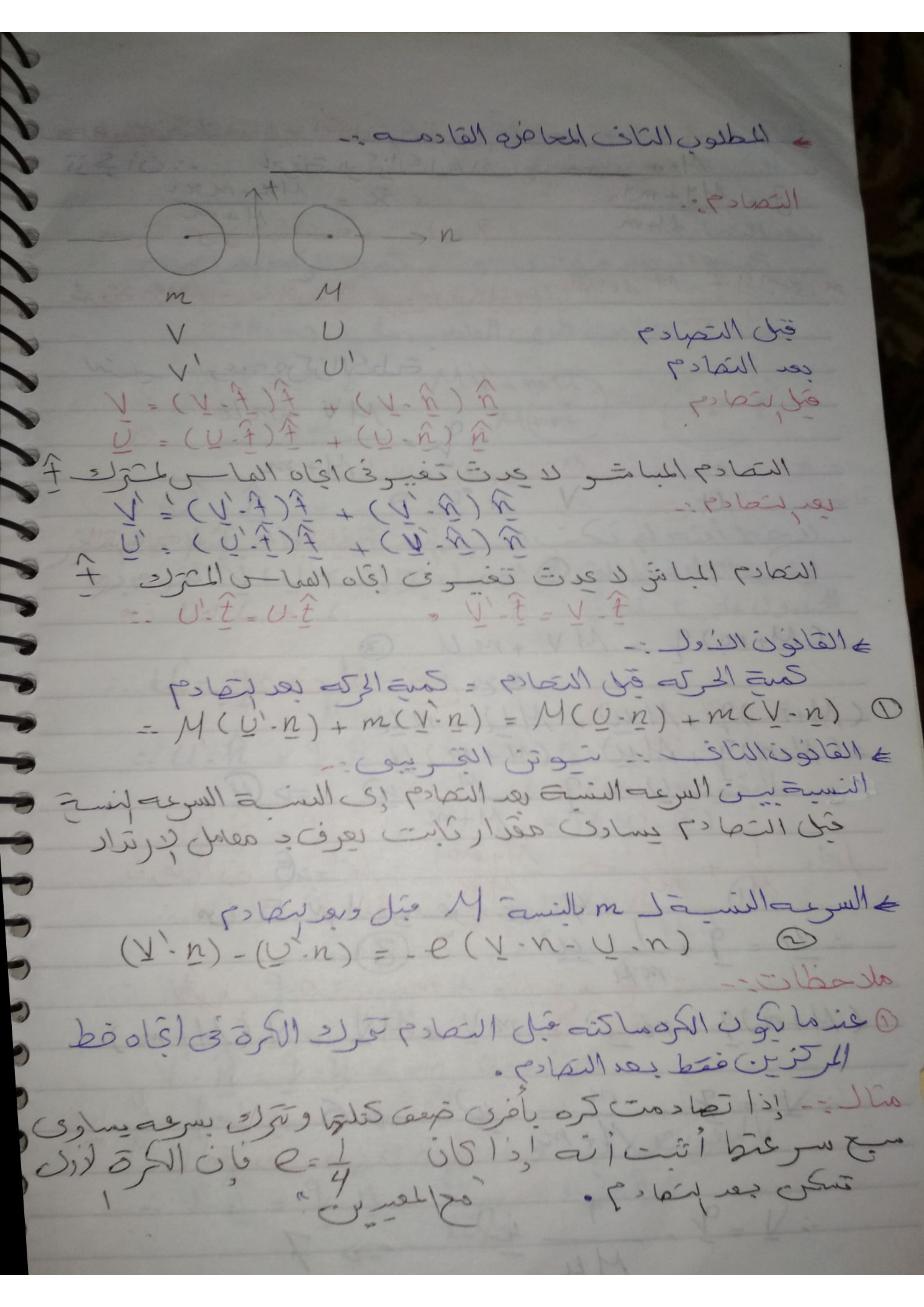
$\therefore t_1 = \frac{m(M-m) g t}{(M+m)^2} \times \frac{(M+m)}{(M-m) g} = \frac{m t}{(M+m)}$

$\therefore$ الزمن المطلوب وهو الزمن حتى تسكن المجموعة سكون لحظي والحبل مشدود هو

$T = t + \tau + t_1 = t + \frac{2(M-m)t}{M+m} + \frac{m t}{M+m}$

$T = t \left[\frac{M + m + 2M - 2m + m}{M+m} \right] = t \left[\frac{3M}{M+m} \right]$

$\therefore T = 3tM / (M+m)$ #



المطلوب الثاني المحاضرة القادمة :-

التصادم :-

	m	M
قبل التصادم	V	U
بعد التصادم	V'	U'

قبل التصادم

$\underline{V} = (\underline{V}\cdot\hat{t})\hat{t} + (\underline{V}\cdot\hat{n})\hat{n}$

$\underline{U} = (\underline{U}\cdot\hat{t})\hat{t} + (\underline{U}\cdot\hat{n})\hat{n}$

التصادم المباشر لا يحدث تغير في اتجاه المماس المشترك $\hat{t}$

بعد التصادم :-

$\underline{V}' = (\underline{V}'\cdot\hat{t})\hat{t} + (\underline{V}'\cdot\hat{n})\hat{n}$

$\underline{U}' = (\underline{U}'\cdot\hat{t})\hat{t} + (\underline{V}'\cdot\hat{n})\hat{n}$

التصادم المباشر لا يحدث تغير في اتجاه المماس المشترك $\hat{t}$

$\therefore \underline{U}'\cdot\hat{t} = \underline{U}\cdot\hat{t} \quad , \quad \underline{V}'\cdot\hat{t} = \underline{V}\cdot\hat{t}$

القانون الأول :-

كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

① $\therefore M(\underline{U}'\cdot\underline{n}) + m(\underline{V}'\cdot\underline{n}) = M(\underline{U}\cdot\underline{n}) + m(\underline{V}\cdot\underline{n})$

القانون الثاني :- نيوتن التجريبي :-

النسبة بين السرعة النسبية بعد التصادم إلى النسبة السرعة النسبية قبل التصادم يساوي مقدار ثابت يعرف بـ معامل الارتداد

السرعة النسبية لـ m بالنسبة لـ M قبل وبعد التصادم

② $(\underline{V}'\cdot\underline{n}) - (\underline{U}'\cdot n) = -e(\underline{V}\cdot n - \underline{U}\cdot n)$

ملاحظات :-

① عندما يكون الكرة ساكنة قبل التصادم تتحرك الكرة في اتجاه خط المركزين فقط بعد التصادم.

مثال :- إذا تصادمت كرة بأخرى ضعف كتلتها وتتحرك بسرعة يساوي سبع سرعتها أثبت أنه إذا كان $e = \frac{1}{4}$ فإن الكرة الأولى تسكن بعد التصادم. "مع المعيدين"

← طريقة سرعة مركز الكتلة :-

تذكر أن :- لمعرفة مركز الكتلة أى جسمين M, m

$$\bar{x} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m} \quad , \quad \bar{y} = \frac{My_1 + my_2}{M+m}$$

حيث مركز الكتلة هو $(\bar{x}, \bar{y})$

لمعرفة أى حاجة خاصة بالجسمين (الكتلتين) $= \frac{M \text{ الحاجة فى } + m \text{ الحاجة فى }}{M+m}$

لتكن سرعة مركز الكتلة

$$\therefore \underline{q} = \frac{MV + mU}{M+m} \quad (1)$$

m	M
U	V

السرعة بالنسبة للكتلتين

$$\underline{\omega} = \underline{U} - \underline{V} \quad (2)$$

من المعادلة :

$$(M+m)\underline{q} = MV + mU \quad (3)$$

نضرب 2 فى M والجمع مع 3

$$(M+m)\underline{q} + M\underline{\omega} = M\underline{U} + m\underline{U}$$

$$\therefore (M+m)\underline{q} + M\underline{\omega} = (M+m)\underline{U}$$

$$\therefore \underline{U} = \underline{q} + \frac{M}{M+m}\underline{\omega} \Rightarrow (4)$$

نفرض أن $\mu^{-1} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{M+m}{Mm} = \mu^{-1} \Rightarrow (5)$

من 5 ثم التعويض فى 4

$$\therefore \underline{U} = \underline{q} + \frac{1}{m\mu}\underline{\omega} \quad (8)$$

نضرب 2 فى $-m$ والجمع مع 3

$$(M+m)\underline{q} - m\underline{\omega} = m\underline{V} + M\underline{V} = \underline{V}(M+m)$$

$$\therefore \underline{V} = \underline{q} - \frac{m}{M+m}\underline{\omega} \Rightarrow 6 \Rightarrow \underline{V} = \underline{q} - \frac{\mu}{M}\underline{\omega}$$

بالتعويض من 5 و 6

$$\therefore \underline{V} = \underline{q} - \frac{1}{M\mu}\underline{\omega} \Rightarrow 7$$

المعادلة 8 ، 7 سرعة الكرتين قبل التصادم بدلالة كلاً من السرعة النسبية وسرعة مركز الكتلة الكرتين

بعد التصادم :-

كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

$$M\underline{V} + m\underline{U} = M\underline{V}' + m\underline{U}'$$

بقسمة كلاً من طرفي المعادلة على $(M+m)$

$$\therefore \frac{M\underline{V} + m\underline{U}}{M+m} = \frac{M\underline{V}' + m\underline{U}'}{M+m} \Rightarrow \underline{q} = \underline{q}'$$

$\therefore$ سرعة مركز الكرتين لا تتغير قبل وبعد التصادم

قانون نيوتن التجريبي $\Rightarrow$ $\underline{w}' \cdot \hat{\underline{n}} = -e\,\underline{w} \cdot n$ (9)

لاحظ أنه لم نكتب السرعة النسبية في اتجاه $\hat{\underline{t}}$ لأنها لم تتغير

بنفس الطريقة التي تم الوصول بها إلى $\underline{U}$ ، $\underline{V}$ نقوم بها للحصول على $\underline{U}'$ ، $\underline{V}'$

$$\therefore U' = \underline{q} + \frac{1}{\mu m} w'$$

بالضرب في $\hat{\underline{n}}$

$$\therefore U' \cdot \hat{\underline{n}} = \underline{q} \cdot \hat{\underline{n}} + \frac{1}{\mu m} \underline{w}' \cdot \hat{\underline{n}} \quad (10)$$

بالتعويض من 9 في 10

$$\therefore U' \cdot \hat{\underline{n}} = \underline{q} \cdot \hat{\underline{n}} + \frac{1}{\mu m} (-e)(\underline{w} \cdot \hat{\underline{n}})$$

$$\therefore U' \cdot \hat{\underline{n}} = \underline{q} \cdot \hat{\underline{n}} - \frac{e}{\mu m} \underline{w} \cdot \hat{\underline{n}} \quad (11)$$

$$\therefore V' = \underline{q} + \frac{1}{\mu M} w' \quad (12)$$

بضرب في $\hat{\underline{n}}$

$$V' \cdot \hat{\underline{n}} = \underline{q} \cdot \hat{\underline{n}} + \frac{1}{\mu M} w' \cdot \hat{\underline{n}}$$

بالتعويض بـ 9

$$\therefore V' \cdot \hat{\underline{n}} = \underline{q} \cdot \hat{\underline{n}} - \frac{e}{\mu M} \underline{w} \cdot \hat{\underline{n}}$$

حل آخر

مثال :- اصطدمت كرة ملساء كتلتها m بأخرى ساكنة كتلتها M ثم انحرفت بزاوية θ عن اتجاه حركتها الأصلي إذا علم أن الكرة M تحركت بعد التصادم في اتجاه يصنع زاوية Ø مع الاتجاه الأصلي لحركة m فأثبت أن إذا كانت $m = eM$ فإن اتجاهي سرعتي الكرتين بعد التصادم متعامدتين ثم أثبت أنه إذا كان التصادم تام المرونة فإن
$\tan\theta = M\sin 2\emptyset / (m - M\cos 2\emptyset)$

m M قبل بعد

قبل

m		M
$(U\sin\emptyset)\hat{t}$	$= U \cdot \hat{t}$	$V \cdot \hat{t} = 0 \Rightarrow$
$(U\cos\emptyset)\hat{n}$	$= U \cdot n$	$V \cdot \hat{n} = 0$

بعد

| | |
--- | --- | ---
$(U\sin\emptyset)\hat{t}$ | $U' \cdot \hat{t}$ | $V \cdot \hat{t} = 0$
$U' \cdot n = ؟؟$ | $U' \cdot \underline{n}$ | $V' \cdot \hat{n} = ؟؟$

$$\therefore \underline{q} = \frac{M\underline{V} + m\underline{u}}{M+m} = \frac{0 + m\underline{u}}{M+m} = \frac{1}{\mu M}\underline{u}$$

$$\underline{q} \cdot n = \frac{1}{\mu M} \cdot u \cdot n = \frac{u \cdot n}{\mu M}$$

$$\omega = \underline{u} - \underline{v} \Rightarrow \omega = u \Rightarrow \omega \cdot n = u \cdot n$$

بعد التصادم

$$u' \cdot n = q \cdot n - \frac{e}{\mu M}\omega \cdot n$$

$$u' \cdot n = \frac{u \cdot n}{\mu M} - \frac{e}{\mu \cdot m} \cdot u \cdot n = \frac{u \cdot n}{\mu}\left(\frac{1}{M} - \frac{e}{m}\right)$$

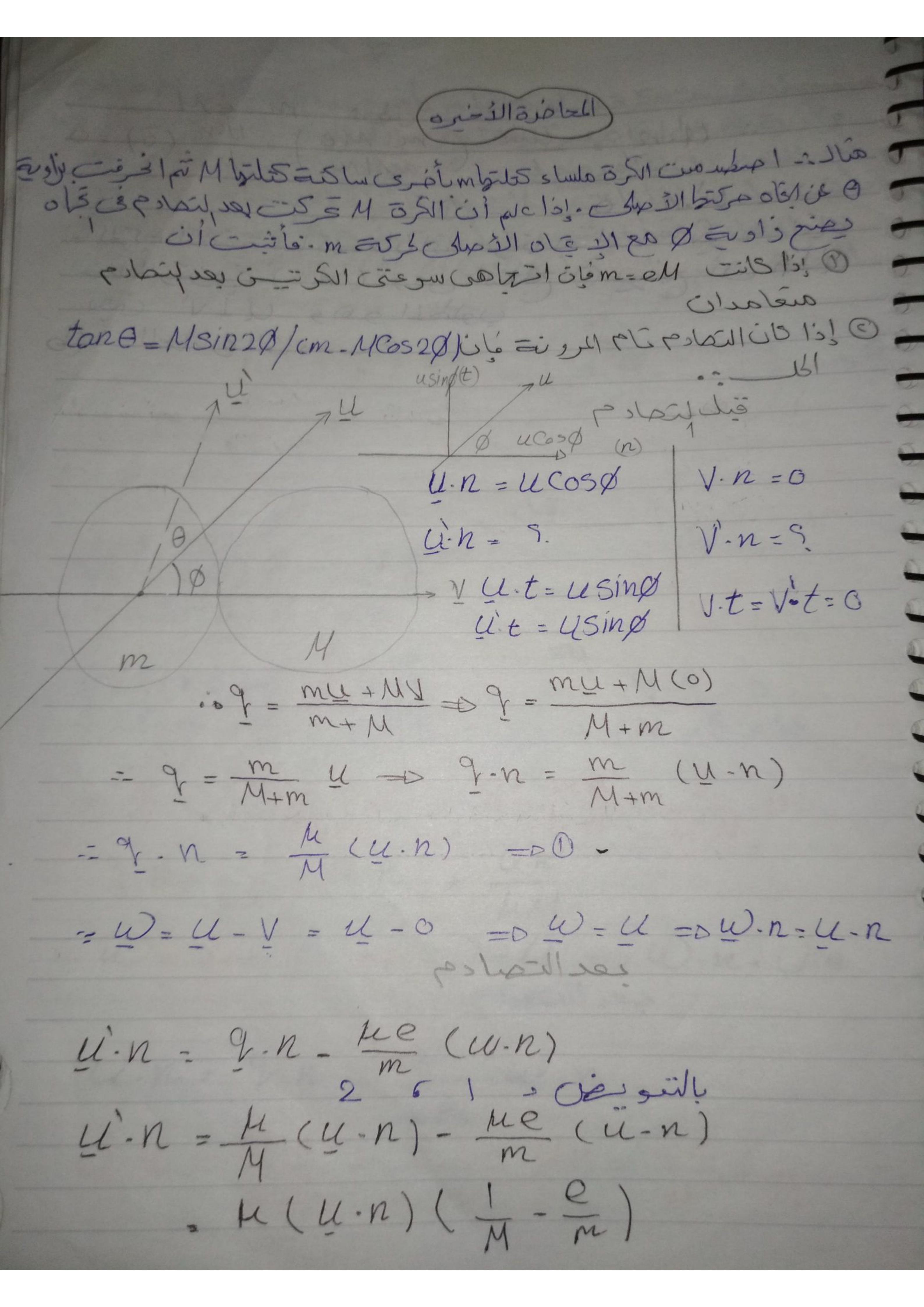
$\because m = eM$ معطى

$$\therefore u' \cdot n = \frac{u \cdot n}{\mu} \left(\frac{m - Me}{Mm} \right) = \frac{u \cdot n}{\mu} (0) = 0$$

$$\therefore u' \cdot n = 0 \quad \rightarrow ①$$

$\because$ الكرة الثانية ساكنة فإن اتجاه حركتها بعد التصادم يكون في اتجاه خط المركزين (n) ومن الناتج ① يوضح أن $u' \perp n$ يجب $u' \perp v'$ وهو المطلوب

b) المحاضرة القادمة



المحاضرة الأخيرة

مثال :- اصطدمت الكرة ملساء كتلتها m بأخرى ساكنة كتلتها M ثم انحرفت بزاوية θ عن اتجاه حركتها الأصلى . إذا علم أن الكرة M تحركت بعد التصادم في اتجاه يصنع زاوية ∅ مع الاتجاه الأصلى لحركة m . فأثبت أن

① إذا كانت M = m فإن اتجاهى سرعتى الكرتين بعد التصادم متعامدان

② إذا كان التصادم تام المرونة فإن $\tan\theta = M\sin 2\varnothing / (m - M\cos 2\varnothing)$

الحل :-

قبل التصادم

$$\underline{u}\cdot n = u\cos\varnothing \qquad V\cdot n = 0$$

$$\underline{u}'\cdot n = ? \qquad V'\cdot n = ?$$

$$\underline{u}\cdot t = u\sin\varnothing \qquad V\cdot t = V'\cdot t = 0$$

$$\underline{u}'\cdot t = u\sin\varnothing$$

$$\therefore \underline{q} = \frac{m\underline{u} + M\underline{V}}{m+M} \Rightarrow \underline{q} = \frac{m\underline{u} + M(0)}{M+m}$$

$$\therefore \underline{q} = \frac{m}{M+m}\underline{u} \Rightarrow \underline{q}\cdot n = \frac{m}{M+m}(\underline{u}\cdot n)$$

$$\therefore \underline{q}\cdot n = \frac{\mu}{M}(\underline{u}\cdot n) \Rightarrow ①$$

$$\therefore \underline{\omega} = \underline{u} - \underline{V} = \underline{u} - 0 \Rightarrow \underline{\omega} = \underline{u} \Rightarrow \underline{\omega}\cdot n = \underline{u}\cdot n$$

بعد التصادم

$$\underline{u}'\cdot n = \underline{q}\cdot n - \frac{\mu e}{m}(\omega\cdot n)$$

بالتعويض ١ ، 2

$$\underline{u}'\cdot n = \frac{\mu}{M}(\underline{u}\cdot n) - \frac{\mu e}{m}(u\cdot n)$$

$$= \mu(\underline{u}\cdot n)\left(\frac{1}{M} - \frac{e}{m}\right)$$

$$\therefore u'\cdot n\Big|_{m=eM} = \mu(u\cdot n)\left(\frac{1}{M} - \frac{e}{eM}\right) = 0$$

∵ الكرة M ساكنة قبل التصادم فإن اتجاه حركتها بعد التصادم في اتجاه خط المركزين (٣) من الملاحظات

$$\therefore u'\cdot n = 0 \quad , \quad v'\cdot n = 1 \quad \Rightarrow u'\cdot v' = 0$$

∴ اتجاهي سرعتي الكرتين بعد التصادم متعامدين

المطلوب الثاني

(المطلوب إثباته) $\tan\theta = \dfrac{M\sin 2\phi}{m - M\cos 2\phi}$

∵ التصادم مرن $e = 1$

$$\therefore \underline{u}'\cdot n = \frac{\mu}{M}\,\underline{u}\cdot n - \frac{e\mu}{m}\,\underline{u}\cdot n$$

$$\underline{u}'\cdot n = \frac{m}{m+M}\,\underline{u}\cdot n - \frac{M}{m+M}\,\underline{u}\cdot n$$

$$\therefore \underline{u}'\cdot n = \left(\frac{m-M}{M+m}\right)(\underline{u}\cdot n) = \left(\frac{m-M}{M+m}\right) u\cos\phi$$

تذكر أن: لمعرفة اتجاه متجه ما كنا بنقسم المركبة في اتجاه $\underline{j}$ على المركبة في اتجاه $\underline{i}$ لكن إحنا المركبات t, n

$$\therefore \tan(\theta+\phi) = \frac{u'\cdot t}{u'\cdot n} = \frac{u\sin\phi\,(M+m)}{(m-M)(u\cos\phi)}$$

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{M+m}{-M+m}\tan\phi$$

$$\frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi} = \frac{M+m}{m-M}\tan\phi$$

$$\therefore \tan\theta + \tan\phi = \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan\phi\,(1 - \tan\theta \tan\phi)$$

$$\tan\theta = \frac{(M+m)}{(m-M)} (\tan\phi - \tan\theta \tan^2\phi) - \tan\phi$$

$$\tan\theta = \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan\phi - \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan\theta \tan^2\phi - \tan\phi$$

$$\tan\theta + \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan\theta \tan^2\phi = \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan\phi - \tan\phi$$

$$\tan\theta \left(1 + \frac{(M+m)}{(m-M)} \tan^2\phi\right) = \tan\phi \left(\frac{(M+m)}{(m-M)} - 1\right)$$

$$\tan\theta \left(\frac{(m-M) + (M+m)\tan^2\phi}{(m-M)}\right) = \tan\phi \left(\frac{M + m - m + M}{(m-M)}\right)$$

$$\tan\theta \left((m-M) + (M+m)\tan^2\phi\right) = 2M \tan\phi$$

$$\tan\theta = \frac{2M\tan\phi}{(m-M) + (M+m)\tan^2\phi}$$

$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$ $\quad$ $\tan^2\phi = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$

$$\tan\theta = \frac{2M\tan\phi}{\dfrac{(m-M)\cos^2\phi + (M+m)\sin^2\phi}{\cos^2\phi}}$$

$$\tan\theta = \frac{2M\sin\phi\cos\phi}{(m-M)\cos^2\phi + (M+m)\sin^2\phi}$$

$$\tan\theta = \frac{M\sin 2\phi}{m\cos^2\phi - M\cos^2\phi + M\sin^2\phi + m\sin^2\phi}$$

$$\tan\theta = \frac{M\sin 2\phi}{m(\cos^2\phi+\sin^2\phi)-M(\cos^2\phi-\sin^2\phi)}$$

$$\tan\theta = \frac{M\sin 2\phi}{m - M\cos 2\phi} \quad \#$$

مثال :- من المثال السابق أثبت أن أكبر قيمة لزاوية الإنحراف تعطى من

$$\tan\theta_{max} = \frac{M}{\sqrt{m^2-M^2}}$$

من المعطى السابق

$$\tan\theta = \frac{M\sin 2\phi}{m - M\cos 2\phi} = f(\phi) \quad (1)$$

من (1) نفرض أن θ دالة في ϕ وكلما زادة ϕ تقل θ وبالتالي لكي تكون θ قيمة عظمى لابد وأن تكون ϕ قيمة صغرى

$$f'(\phi) = \frac{[M2]\cos 2\phi\,(m - M\cos 2\phi) - 2\overset{M}{}\sin 2\phi\,(M\sin 2\phi)}{(m - M\cos 2\phi)^2}$$

$$= 2M\,\frac{m\cos 2\phi - M\cos^2 2\phi - M\sin^2 2\phi}{(m - M\cos 2\phi)^2}$$

$$= 2M\,\frac{m\cos 2\phi - M}{(m - M\cos 2\phi)^2}$$

$\therefore f'(\phi) = 0 \Leftarrow 2M\,[m\cos 2\phi - M] = 0$

$M = 0$ مرفوض OR $m\cos 2\phi = M \Rightarrow \cos 2\phi = \frac{M}{m}$

$\therefore$ تكون ϕ قيمة صغرى عندما يكون $\cos 2\phi = \frac{M}{m}$ وللتأكد نشتق مرة أخرى $f''(\phi)$ ثم نعوض ب قيمة $\cos 2\phi = \frac{M}{m}$ نجد الناتج موجب ولو كانت غير ذلك يعني المثال غلط

تذكران ⇒ $f'(x) = 0$ ⇒ ناتج → هذا الناتج لو عوضنا بي المشتقة الثانية

→ $-ve$ عظمى

→ $+ve$ صغرى

→ $\pm\infty$ غير معرف

وعند التعويض ب $\cos 2\phi = \frac{\mu}{m}$ في المعادلة رقم ! تكون $\tan\theta_{max}$ ⇐ $\tan\theta$

$$\tan_{max} = \frac{\mu(\sqrt{m^2-\mu^2}/m)}{m - \mu\frac{\mu}{m}}$$

$$\tan_{max} = \frac{\mu\sqrt{m^2-\mu^2}}{m^2-\mu^2} = \frac{\mu}{\sqrt{m^2-\mu^2}} \#$$

(triangle: hypotenuse m, base m [sic], side $\sqrt{m^2-\mu^2}$, angle 2ϕ)

← تصادم كرة بمستوى أملس :-

:. نعتبر المستوى كرة نصف قطرها ∞ وبالتالي يصبح سطح المستوى المماس المشترك .

الرسم ←

($\underline{n}$, $\underline{t}$)

إستنتاج المعادلات

($\underline{V}$, $\underline{n}$, $\underline{V}'$, θ, ϕ)

((t), θ, (n), $\underline{V}\sin\theta$, θ, $\underline{V}\cos\theta$)

$\underline{w}' = -e\underline{w} \Rightarrow (1)$, $\underline{u}' = -e\underline{u} \Rightarrow (2)$

مع العلم بأن سرعة المستوى $\underline{u} = 0$

$v'.t = v.t = v\sin\theta \Rightarrow (3)$, $u.n = -u\cos\theta$

من 2

$\underline{u}'.n = -e(\underline{u}.n) \Rightarrow \underline{u}'.n = -e(-\underline{u}\cos\theta)$

$\underline{u}'.n = +e\underline{u}\cos\theta$

المقدار، $|\underline{u}'| = \sqrt{(\underline{u}'.t)^2 + (\underline{u}'.n)^2} = \sqrt{u^2\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta}$

$|\underline{u}'| = u\sqrt{\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta}$

وعندما يكون $e = 1 \Leftarrow |\underline{u}'| = |\underline{u}|$

$e = 1 \Leftarrow \theta = \phi$

$e = 1 \Leftarrow$ يكون السرعات وهي نزلي عكس إتجاه
قبل التصادم
وهي لطلعا
بعد التصادم

من الرسم $\Leftarrow$

$$\cot\phi = \frac{u'.n}{u'.t} = \frac{eu\cos\theta}{u\sin\theta} = e\cot\theta$$

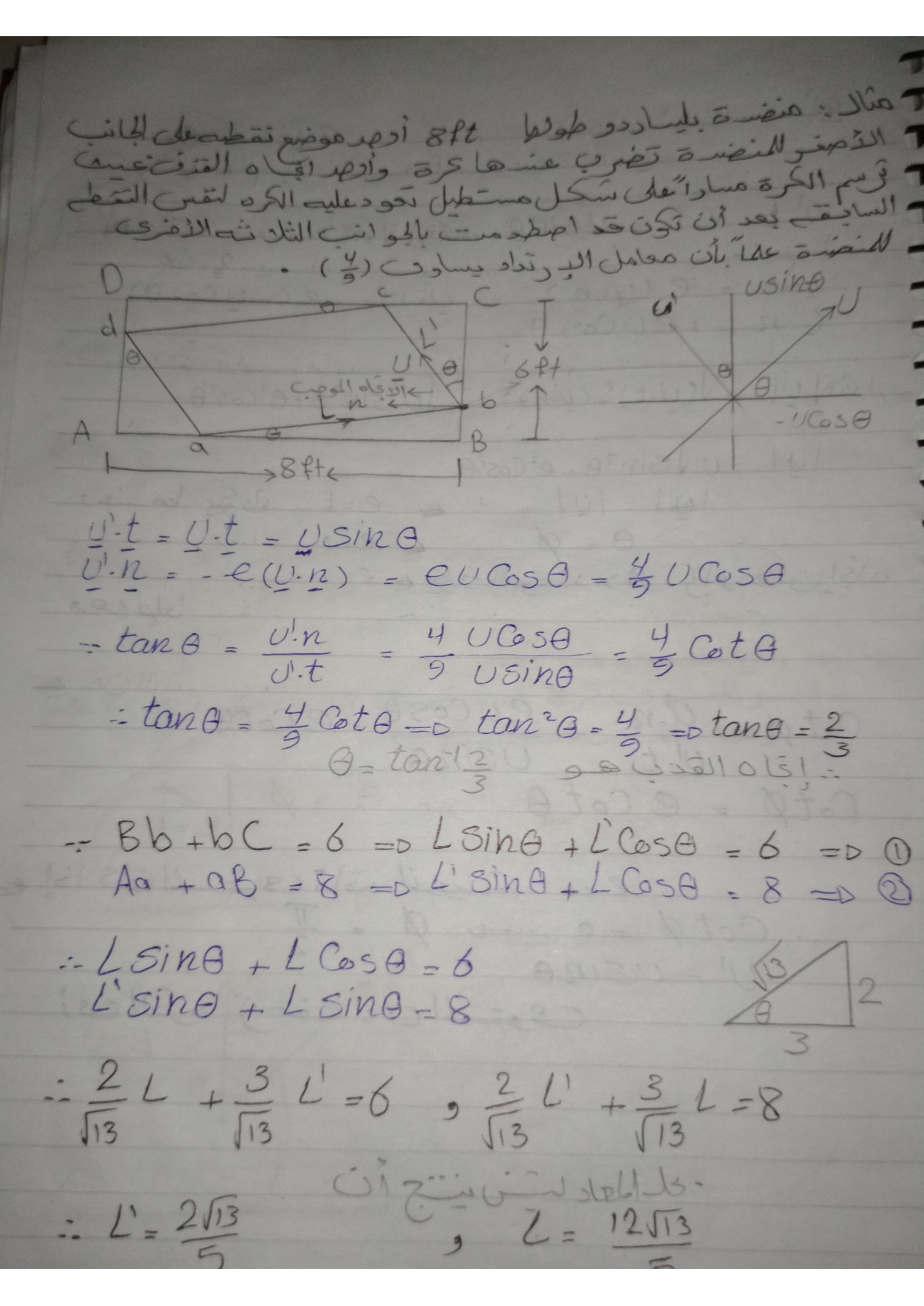
$$\cot\phi = e\cot\theta \Rightarrow \theta = \phi \Big|_{e=1}$$

$\Leftarrow$ إذا كان المستوى فاقد المرونة $e = 0$

$\therefore \cot\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

$u' = u\sin\theta$

أي الكرة تزحف على المستوى



مثال: منضدة بلياردو طولها 8ft أوجد موضع نقطة على الجانب الأصغر للمنضدة تضرب عندها كرة، وأوجد اتجاه القذف بحيث ترسم الكرة مساراً على شكل مستطيل تعود عليه الكرة لنفس النقطة السابقة بعد أن تكون قد اصطدمت بالجوانب الثلاث الأخرى للمنضدة علماً بأن معامل الارتداد يساوي $(\frac{4}{9})$.

$$\underline{u}'\cdot\underline{t} = \underline{u}\cdot\underline{t} = u\sin\theta$$

$$\underline{u}'\cdot\underline{n} = -e(\underline{u}\cdot\underline{n}) = eu\cos\theta = \frac{4}{9}u\cos\theta$$

$$\because \tan\theta = \frac{u'\cdot n}{u'\cdot t} = \frac{4}{9}\frac{u\cos\theta}{u\sin\theta} = \frac{4}{9}\cot\theta$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{4}{9}\cot\theta \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{4}{9} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ اتجاه القذف هو $\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$$\because Bb + bC = 6 \Rightarrow L\sin\theta + L'\cos\theta = 6 \Rightarrow (1)$$

$$Aa + aB = 8 \Rightarrow L'\sin\theta + L\cos\theta = 8 \Rightarrow (2)$$

$$\therefore L\sin\theta + L\cos\theta = 6$$

$$L'\sin\theta + L\sin\theta = 8$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{13}}L + \frac{3}{\sqrt{13}}L' = 6 \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{13}}L' + \frac{3}{\sqrt{13}}L = 8$$

بحل المعادلتين ينتج أن

$$\therefore L' = \frac{2\sqrt{13}}{5} \quad , \quad L = \frac{12\sqrt{13}}{5}$$

$$Bb = l\sin\theta = \frac{24}{5}\,ft \quad , bc = l'\cos\theta = \frac{6}{5}\,ft$$

مثال: قذفت كرة مرنة من نقطة O على بعد قدره a من حائط رأسي أملس فاصطدمت بالحائط وعادة لتقطع القذف مرة أخرى، إذا كانت θ زاوية القذف، Ø زاوية ميل مسار الكرة على الأفقي عند نقطة القذف عند عودة الكرة إليها. أثبت أن $\tan\theta = e\tan\phi$ حيث e معامل ارتداد الكرة على الحائط أثبت أيضاً أنه لكي تعود الكرة لنقطة القذف يجب أن يتحقق الشرط $u^2\sin 2\theta = ag(1+\frac{1}{e})$

الحل:-

$u'\cos\phi$ ، ϕ ، u' ، $u'\sin\phi$ ، موجب

$u\sin\theta$ ، u ، θ ، $u\cos\theta$ ، سالب

موجب ، سالب ، u' ، u ، ϕ ، θ ، a

نفرض أن:- ① u سرعة القذف (قبل التصادم)

② u' سرعة عودتها مرة أخرى (بعد التصادم)

∴ المستوى أملس فإنه لا توجد تغير على t

$$\therefore u\sin\theta = u'\sin\phi \quad ①$$

من نيوتن التجريبي (السالب اتجاه على ... القانون (-) الاتجاه)

$$\underline{u'}\cdot\underline{n} = -e\,\underline{u}\cdot\underline{n} \quad \Delta\!\!\!\Rightarrow \underline{u'}\cdot\underline{n} = e\,u\cos\theta \quad ②$$

∴ الجسم يتحرك كمقذوف فإن السرعة الأفقية لا تتغير على طول المسار، سواء قبل التصادم أو بعده

$$u'\cos\phi = eu\cos\theta \Rightarrow ③$$

بقسمة 1 ، 3

$$\tan\phi = e^{-1}\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = e\tan\phi \;\#$$

لكي يعود الكرة لنفس النقطة لا بد أن يتساوى زمن الطيران مع مجموع زمن الذهاب والإياب

ملحوظة: الزمن = المسافة / السرعة الأفقية (منتظمة - ثابتة) = المسافة / السرعة الرأسية (منتظمة - ثابتة)

زمن الإياب

$$\therefore T = \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{a}{u\cos\theta} + \frac{a}{eu\cos\theta}$$

(زمن الذهاب، السرعة الأفقية)

$$= \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{ea + a}{eu\cos\theta} = \frac{a(e+1)}{eu\cos\theta}$$

$$\therefore 2u^2 e\sin\theta\cos\theta = ag(e+1)$$

$$eu^2\sin 2\theta = ag(e+1) \Rightarrow$$

$$u^2\sin 2\theta = ag\left(1+\frac{1}{e}\right) \quad \#$$

مثال ٦- سقطت كرة رأسيا من سكون فاصطدمت بعد ثانيتين بمستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية $30°$ إذا علم أن معامل الارتداد يساوي $3/4$. أثبت أن الكرة تصطدم بالمستوى مرة أخرى بعد ٣ ثوان من الاصطدام الأول

الحل

(رسم: U، مستوى، $t=2$، 30، 30، n، t، θ، $U\sin\theta$، $U\cos\theta$، موجب)

من قوانين نيوتن للحركة

$$V = V_0 + gt$$

$$\therefore V = 0 + 32 \times 2 = 64 \text{ ft/s}$$

$$\therefore \underline{U}\cdot\underline{t} = \underline{U}'\cdot\underline{t} = U\sin\theta = 64\sin 30 = 32$$

$$\underline{U}\cdot\underline{n} = -U\cos\theta = 64\cos 30 = 32\sqrt{3}$$

وإتجاهها لأسفل

$$\underline{U}'\cdot\underline{n} = -e\,\underline{U}\cdot\underline{n} = -e(-U\cos\theta) = -eU\cos\theta$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 32\sqrt{3} = -24\sqrt{3}$$

وإتجاهها لأعلى

* الكرة تتحرك بعد التصادم بسرعة إبتدائية مقدارها $-24\sqrt{3}$ - الحركة مائل بزاوية 30° على الأفقي والعجلة الجاذبية رأسياً على الأفقي فإن العجل تحلل

∴ الجسم اصطدم مرة أخرى بالمستوى ∴ ⇅ $\Rightarrow y = 0$

$\therefore y = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$\therefore 0 = -24\sqrt{3} + \frac{1}{2}(g\cos\theta)t^2$

$0 = -24\sqrt{3} + \frac{1}{2}(32\cos 30)t^2$

$\Rightarrow 0 = t(-24\sqrt{3} + 8\sqrt{3}t)$

$t = 0 \quad , \quad 24\sqrt{3} = 8\sqrt{3}t \Rightarrow t = 3$ #

س: كتلتان مقدارهما بالباوند 5، 7 متصلتان بخيط غير مرن يمر حول بكرة ملساء مثبتة، إذا علم أن الكتلة الكبرى تصطدم بمستوى أفقي غير مرن بعد ثلاث ثواني من بدء حركتها، أثبت أن النظام يعود إلى حالة السكون اللحظي بعد زمن 9/4 ثانية من لحظة التصادم.

$t = 3$

$\Rightarrow m\underline{a} = mg - T$ ①

$M\underline{a} = -Mg + T$ ②

بالجمع

$\underline{a}(m + M) = g(m - M)$

$\underline{a}(12) = 2g \Rightarrow \underline{a} = \frac{g}{6}$

المجموعة متحركة بسرعة V وبعجلة $\underline{a} = \frac{g}{6}$

عند اصطدام الكتلة 7 بالمستوى تتحرك الكتلة 5 كمقذوف رأسي بسرعة قدرها v ثم تعود لنقطة زمن الطيران

$V = V_0 + at \Rightarrow U = 0 + \frac{g}{6} \times 3 = \frac{g}{2}$

$\therefore t = \frac{2V\sin\theta}{g} = \frac{2U}{g} = \frac{2g}{2g} = 1$ ث

← الكتلة 5 استغرقت ثانية للحركة كمقذوف والعودة مرة أخرى بنفس السرعة حتى تشد الحبل فجأة فتولد شد أو دفع لحظي في الحبل

∴ كمية [illegible] = كمية الحركة بعد الدفع

$\therefore MV = (m + M)V'$

$5 \times \frac{g}{2} = (12)V' \Rightarrow V' = \frac{5}{24}g$

∴ المجموعة تتحرك بعجلة مقدارها $-\frac{g}{6}$ وبسرعة $\frac{5g}{24}$ حتى تسكن لحظيا والحبل مشدود

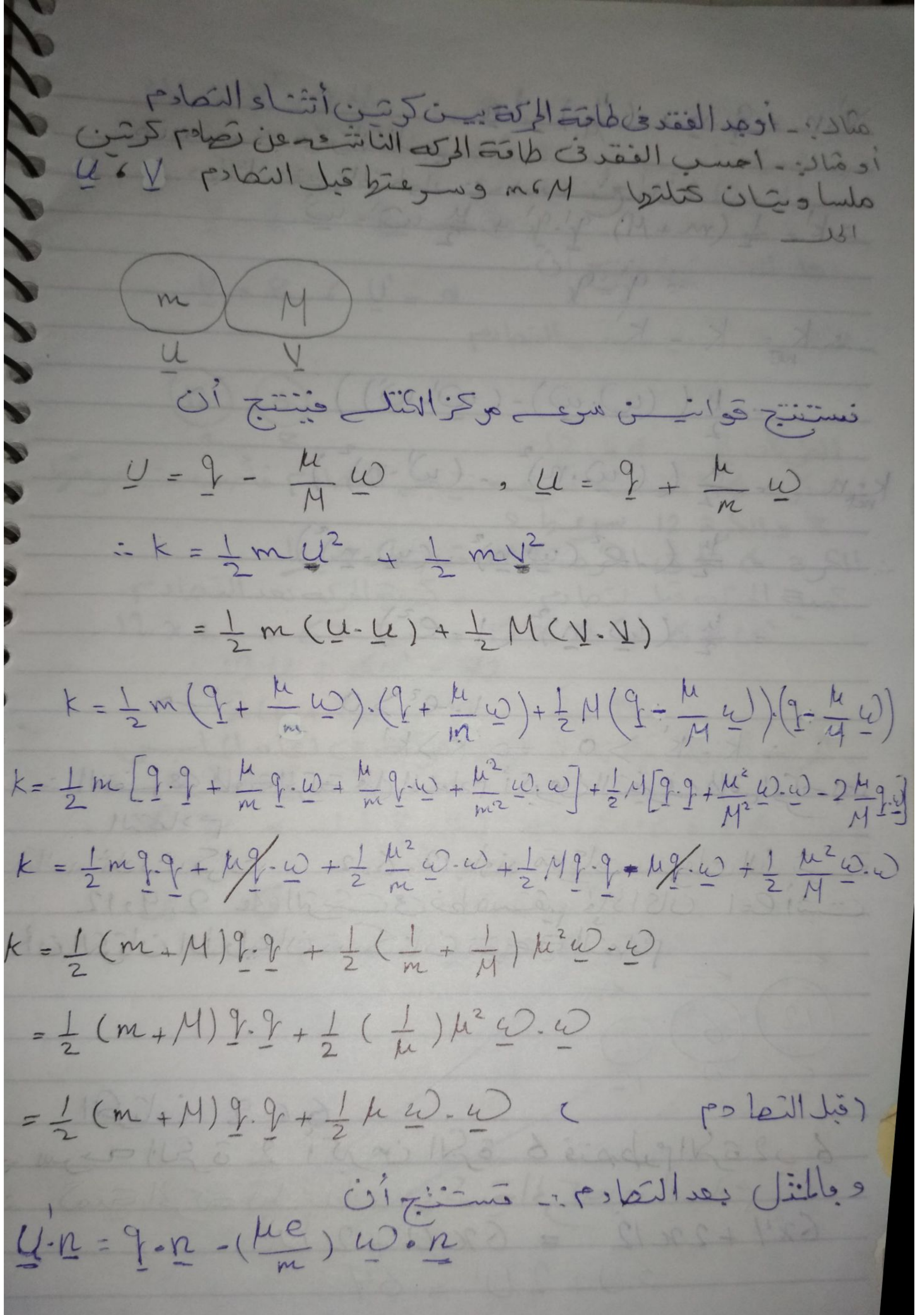
$\therefore V'' = V'_0 + at$

$0 = \frac{5g}{24} - \frac{g}{6}t$

$\therefore \left(\frac{5g}{24}\right) = \left(\frac{g}{6}\right)t \Rightarrow t = \frac{5}{4}$

∴ الزمن الكلي الذي استغرقته المجموعة للسكون مرة أخرى هو

$T = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$ s #



مثال: - أوجد الفقد في طاقة الحركة بين كرتين أثناء التصادم

أو مثال: - احسب الفقد في طاقة الحركة الناشئة عن تصادم كرتين ملساويتين كتلتهما M, m وسرعتهما قبل التصادم $\underline{V}, \underline{u}$

الحل

نستنتج قوانين سرعة مركز الكتلة فينتج أن

$$\underline{V} = \underline{q} - \frac{\mu}{M}\underline{w} \quad , \quad \underline{u} = \underline{q} + \frac{\mu}{m}\underline{w}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} m \underline{u}^2 + \frac{1}{2} m \underline{V}^2$$

$$= \frac{1}{2} m (\underline{u}\cdot\underline{u}) + \frac{1}{2} M (\underline{V}\cdot\underline{V})$$

$$k = \frac{1}{2} m \left(\underline{q} + \frac{\mu}{m}\underline{w}\right)\cdot\left(\underline{q} + \frac{\mu}{m}\underline{w}\right) + \frac{1}{2} M \left(\underline{q} - \frac{\mu}{M}\underline{w}\right)\cdot\left(\underline{q} - \frac{\mu}{M}\underline{w}\right)$$

$$k = \frac{1}{2} m \left[\underline{q}\cdot\underline{q} + \frac{\mu}{m}\underline{q}\cdot\underline{w} + \frac{\mu}{m}\underline{q}\cdot\underline{w} + \frac{\mu^2}{m^2}\underline{w}\cdot\underline{w}\right] + \frac{1}{2} M \left[\underline{q}\cdot\underline{q} + \frac{\mu^2}{M^2}\underline{w}\cdot\underline{w} - 2\frac{\mu}{M}\underline{q}\cdot\underline{w}\right]$$

$$k = \frac{1}{2} m \underline{q}\cdot\underline{q} + \mu \underline{q}\cdot\underline{w} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m}\underline{w}\cdot\underline{w} + \frac{1}{2} M \underline{q}\cdot\underline{q} - \mu \underline{q}\cdot\underline{w} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{M}\underline{w}\cdot\underline{w}$$

$$k = \frac{1}{2}(m+M)\underline{q}\cdot\underline{q} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\mu^2 \underline{w}\cdot\underline{w}$$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\underline{q}\cdot\underline{q} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\right)\mu^2 \underline{w}\cdot\underline{w}$$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\underline{q}\cdot\underline{q} + \frac{1}{2}\mu \underline{w}\cdot\underline{w}$$ ، (قبل التصادم)

وبالمثل بعد التصادم: نستنتج أن

$$\underline{u}'\cdot\underline{n} = \underline{q}\cdot\underline{n} - \left(\frac{\mu e}{m}\right)\underline{w}\cdot\underline{n}$$

$V'\cdot n = q\cdot n + (\frac{\mu}{M})\, w'\cdot n$ من سرعة مركز الكتلة

وبالمثل نفس الخطوات نستنتج أن

$\therefore k' = \frac{1}{2}(m+M)\, q'\cdot q' + \frac{\mu}{2}\, w'\cdot w'$

$\because q' = q$

$\therefore K_{net} = K - K'$

$= \frac{\mu}{2}\left((w\cdot w) - (w'\cdot w')\right)$

$K_{net}\cdot n = \frac{\mu}{2}\left((w\cdot n)^2 - (w'\cdot n)^2\right)$

$= \frac{\mu}{2}\left(-e^2 (w\cdot n)^2 + (w\cdot n)^2\right)$

$= \frac{\mu}{2}(w\cdot n)^2 (1 - e^2)$

حيث $1 - e^2 > 0$

$\therefore K - K' > 0 \Rightarrow K > K'$

$\therefore$ التغير في طاقة الحركة قبل التصادم أكبر من التغير في طاقة الحركة بعد التصادم

مثال: ثلاث كرات 12, 6, 2 باوند متحركات بسرعات الآتية 2, 4, 12 على الترتيب في خط مستقيم فإذا كان $e=1$ أثبت أن الكرتان الأوليتان تسكنان نتيجة التصادم

(12) (6) (2)

2 4 12

الكرتان 2 و 6

$\therefore$ سرعة الكرة 2 أكبر من الكرة 6 فتصطدم الكرة 2 بـ 6

$\therefore$ كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم

$6\times 4 + 2\times 12 = 6\times U + 2U'$

$6U + 2U' = 64$

$3\underline{V} + \underline{V}' = 24 \implies (1)$

∵ الحركه أفقيه فإنه لا توجد مركبة في اتجاه المماس

∴ $\omega' = -e\omega \implies \underline{U}' - \underline{U} = -e(12-4)$

$\underline{V}' - \underline{V} = -8 \implies (2)$

- بحل المعادلتين ينتج أن

$\underline{V} = 8 \;،\; \underline{U}' = 0$

∴ الكتله 2 تسكن نتيجه التصادم

(12) (6)

2 8

الكرتان الـ 6 و 12

∵ الكرة 6 إكتسبت سرعه نتيجه التصادم فأصبحت سرعتها 8 والكرة 12 سرعتها 2

∴ الكرة 6 تلحق الكرة 12 و تصطدم بها

كمية الحركه قبل التصادم = كمية الحركه بعد التصادم

$\therefore 12 \times 2 + 6 \times 8 = 12 \times u + 6 \times u'$

$\therefore 12u + 6u' = 72$

$2u + u' = 12 \implies (1)$

∵ الحركه أفقيه فإنه لا توجد مركبة في اتجاه المماس

$\therefore \omega' = -e\,\omega$

$\therefore u' - u = -1(8-2) \implies u' - u = -6 \implies 2$

- بحل المعادلتين ينتج أن

$u = 6 \qquad u' = 0$

∴ تسكن الكتله 6 نتيجة التصادم